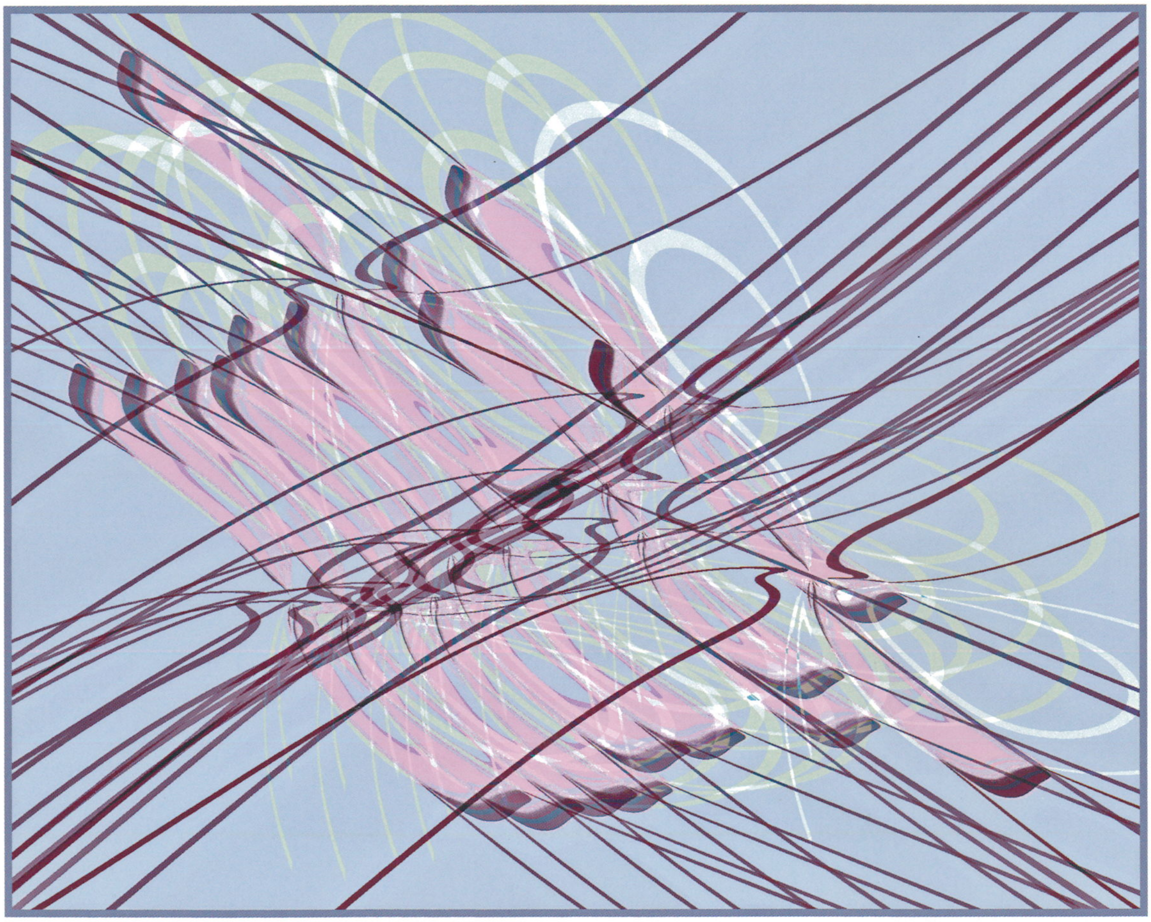
昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2012年６月１日発行　第50巻６号　毎月１回１日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

6
2012

特集 面白い発想 [物理編]
物理的思考のためのヒントを探る



No.588
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 588 June 2012

面白い発想［物理編］

物理的思考のためのヒントを探る

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間(本誌のみ) 11,000円, 半年間(本誌のみ) 5,500円. (税込み価格)

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい.

数理科学特集一覧

63年/7～2009年/5 省略
2009年/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊　量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊　現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学

数理科学臨時別冊一覧

11年/6 共形場理論
11年/9 演習形式で学ぶ相転移・臨界現象
11年/10 実例で学ぶ 精度保証付き数値計算
11年/11 リーマン予想の数理物理
11年/12 量子多体系の物理
12年/1 現象から方程式を創り出す
12年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12年/4 弦理論の代数的基礎
12年/5 アインシュタイン方程式

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
三省堂本店(神田)
リブロ池袋店
ジュンク堂書店(池袋)
芳林堂(高田馬場)
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店(横浜)
有隣堂イセザキ町本店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
ジュンク堂書店(盛岡)
丸善津田沼店
ジュンク堂書店(新潟)
ジュンク堂甲府岡島店
ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂書店(京都)
ジュンク堂京都BAL店
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店(神戸)
ジュンク堂書店(大分)
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂書店(仙台)
ジュンク堂書店(秋田)
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学 (北1店)
九州大学 (理系)

MATHEMATICAL SCIENCES

June 2012 Number 588

特集／面白い発想［物理編］

面白い発想とすごい発想

藤川 和男

物理学における「面白い発想」を考えるというのが与えられた課題である．面白い発想というのは何かを考えると，一般的に物理学に関係した日常現象等においてこのような面白い見方とか考え方があるのか，という観点からの考察がまず考えられる．他方，物理で（とくに研究者の仲間で）面白い発想という場合には，すごい物理的な発見につながる発想を意味する場合も多い．今回の特集でも，このような多様な観点からの「面白い発想」が記述されるだろう．

私は，最近CPT対称性というものについて考察する機会があり，この話題に関係した日本人のすごい一連の発想について記したい．ここでCというのは粒子と反粒子の置き換えを意味する．例えば，電子と陽電子の置き換えを意味する．次に，Pはこの世界と鏡の中に映った世界を置き換えることを意味し，いわゆるパリティを意味する．最後のTは過去と未来を置き換える，いわゆる時間反転と言われるものを示す．特殊相対性理論の世界である4次元ミンコウスキー空間は，空間の各点ではPとTに関して対称なように構成されている．このような純粋に時空間の対称性に，どうしてCという粒子と反粒子を置き換える変換が顔を出すのかというと，これは負のエネルギーを持つ粒子の存在という現象に関係している．一般に特殊相対性理論に従う理論では負のエネルギーを持つ粒子の存在を避けることができない．この負のエネルギーを持つ粒子は時間軸の負の方向に向かって運動すると考えると，正のエネルギーを持つ反粒子が時間軸の正の方向に向かって運動するのと同等であることが示され，このことが「反粒子」の存在を予言することになる．この負のエネルギー粒子が時間軸の負の方向に走れば，通常の正のエネルギーを持つ反粒子と理解できるという見方は，まさしく「面白い発想」であり「すごい発想」であるが，この見方はファインマン（R. Feynman）等により強調された．これら3つの変換あるいは置き換えを組み合わせたものがCPT変換あるいはCPT対称性と呼ばれるものである．

CPT対称性と呼ばれるものの一番重要な性質は，通常の特殊相対性理論に従う場の理論（量子力学の相対論的なバージョン）では，ごく自然な仮定だけから，一般に理論はCPT不変であることが結論される．この帰結として，粒子には必ず反粒子が伴われており，しかも両者の質量が完全に等しいということが結論される．これは，CPT定理として知られており，パウリ（W. Pauli）とかリューダース（G. Lueders）により定式化された．このように時空間の対称性の考察から粒子と反粒子の質量等についての非常に強い制約が得られるのは，文字通り「面白い発想」であり「すごい発想」でもある．最近一部の研究者の間では，こ

の粒子と反粒子の同等性が破れていてもよいのではないかと考えられており，私の上記の考察もそれに関係している．

さて，ここで議論したいのは，この CPT 対称性の一部である CP 対称性に関係した日本人の大きな貢献である．現在ではよく知られているように，小林誠・益川敏英両氏により，素粒子の標準模型に現れる CP 対称性の破れの機構が解明された．CPT 対称性がよいと仮定すると，CP 対称性の破れは T の破れに同等であり，したがって T の破れに特徴的な複素数を持つ結合定数が理論に現れる．6 個のクォークが存在する素粒子の標準理論では，クォークの混合という現象（同じ電荷を持つクォークの線形結合が弱い相互作用に関与する）が起こるが，この数係数に複素数の要素が少なくとも一個現れるというのが小林・益川理論の要点であり，これが K 中間子とか B 中間子の系での CP 対称性の破れの原因であるというのが結論であり，KEK の B ファクトリーでの実験で見事に検証された．

この小林・益川理論が提唱されたのが 1972 年の夏であり，その理論が本格的に注目を集め始めたのが 1975 年の夏であった．最初に，ハワイ大学のパクバサ（S. Pakvasa）氏と KEK の菅原寛孝両氏により，K 中間子の系での CP 対称性の破れが小林・益川スキームで説明できる可能性が指摘された．（他のところでも書いたことがあるが，SLAC の SPIRES という文献索引では，1975 年の 2 月に開かれた研究会で私が小林・益川理論の存在を CP 対称性に関係して初めて引用したことになっている．しかし，そのときは単にそのような提案の存在を重いレプトン等との関連で指摘しただけで，本格的な計算はパクバサと菅原両氏の研究が最初である.）この計算を契機として，小林・益川理論という名称が確立した．

次に，CP の研究で「すごい発想」は，1978 年に当時東北大学にいた吉村太彦氏により出された．同氏は，CP 対称性の破れと当時盛んに研究されていた大統一理論におけるバリオン数の破れ（すなわち陽子も崩壊するという可能性）を組み合わせると，ビッグバン宇宙論において初期条件として例えば光だけで物質も反物質もない状態から出発しても，現在観測されているように通常の物質のみでできている宇宙が生まれる可能性を指摘した．もし，宇宙のどこかに反物質でできた星団等があれば，通常の物質でできた星団等と衝突すればものすごい爆発現象が観測されるはずだが，これまでの観測では宇宙のどこかに大量の反物質が蓄えられているという兆候はない．この考察は，CP 対称性の物理的な重要性を示す決定的な研究になったが，少し異なる視点から 1960 年代にソ連のサハロフ（A. Sakharov）氏により考察されていたことが後に判明したのは残念なことであった．

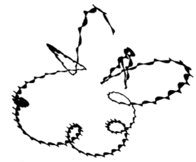
ほぼ同時期の 1981 年に当時ロックフェラー大学にいた三田一郎氏により，小林・益川理論は B 中間子系でも興味のある CP 対称性の破れの現象を示す可能性が指摘された．1980 年の前半の半年間は私はニューヨーク州立大学に滞在しており，昔の共同研究者でもある三田氏とも物理の議論を行い，直接同氏から進行中の研究の話も聞いていたが，この「面白い発想」の重要性は当時はあまり認識できなかった．この B 中間子の系での CP 対称性の破れの実験的な検証が，小林・益川両氏のノーベル賞に結びつく契機となった．

いずれにしても，私の同年輩である日本人の研究者が中心的な役割を果たした CP 対称性の破れの機構の提案から検証に関して，多くの「面白い発想」あるいはより正確には「すごい発想」が出され，それが現実の素粒子の世界を記述していることが確証されたのは，同時代を生きたものとしては感慨深いものがある．

ここでは私の個人的な研究分野に近いところでの面白い発想とかすごい発想を記したが，本特集ではすごい発想に加えてより多様な視点から物理学における多くの面白い発想が解説されるだろう．読者の皆さんも楽しまれたい．

（ふじかわ・かずお，日本大学理工学部）

潮汐の話



斎藤 基彦

皆さんは，子供の頃潮干狩りに行った経験があるであろう．春の潮干狩りは潮が引いたときの浜での楽しみである．しかし数時間たつと，潮が満ちてきて海面が上がってくるので，潮干狩りは終になる．注意深く観察すると，このような潮の満ち引きは1日に2回起こることに気がつく．なぜこのような潮の満ち干があるのだろうか．この疑問に初めて解答を試みたのは，かの**ガリレオ**であった．

ガリレオは，潮の満ち干は地球が公転と自転をしていることの決定的な証拠であると考えた[1]．『**天文対話**』（1632年）の第四日目の対話で，地球は自転や公転で回転しているため，海水がゆさぶられて移動するのが原因であるとしている．ただし，単にゆさぶられるだけでは1日に1度しか満ち干きが起こらないので，満ち干きが2度起こるための様々な理由を考える必要があった．

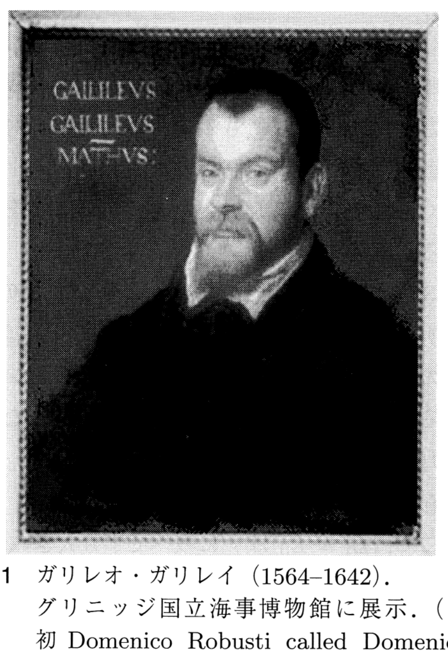


図1 ガリレオ・ガリレイ（1564–1642）．グリニッジ国立海事博物館に展示．（当初 Domenico Robusti called Domenico Tintoretto（ヴェネツィア，有名な Jacopo Tintoretto の子）とされていたが，最近の2008年 Vincenzo Mancini により Francesco Apollodoro（パドゥア）とされた [National Maritime Museum collections blog, http://www.rmg.co.uk/blogs/collections/category/oil-paintings/].）

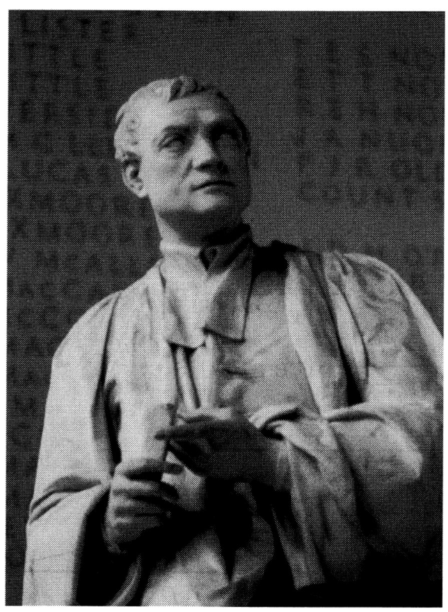


図2 アイザック・ニュートン（1643–1727）．（ケンブリッジ大学トリニティ・カレッジ礼拝堂にて1972年，筆者撮影．）

ところが，彼の理論は正しくなかった．正しい理論を考えたのは**ニュートン**である．ニュートンは『**プリンキピア**』[2] で，潮汐は月や太陽の重力によるとした．これが現代では受け入れられている．

潮汐の理論はガリレオほどの人でも間違えたということで知られている．あるいは，並みの人が間違えたのなら放っておかれただろうが，あのガリレオということで，逆に有名となってしまったということでもあろう．

ここでは最も簡単な**潮汐の平衡理論**を述べる．あわせて土星の輪の成因と考えられることも紹介する．

1. 潮汐の平衡理論

海水の微小部分の位置を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$，地球の中心と月の中心の位置をそれぞれ $\boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}$，それらの質量を μ, M, m として，

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}, \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}, \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}$$

と略記する．地球，月が一様な密度の球形であるとすると，ニュートンの運動方程式は，G を万有引力定数として，

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM}{|\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}|^3}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}) - \frac{Gm}{|\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}|^3}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}) = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} - \frac{Gm}{\rho^3}\boldsymbol{\rho}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gm}{|\boldsymbol{r}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}|^3}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}) - \frac{G\mu}{|\boldsymbol{r}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}|^3}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}) \approx \frac{Gm}{L^3}\boldsymbol{L}, \tag{2}$$

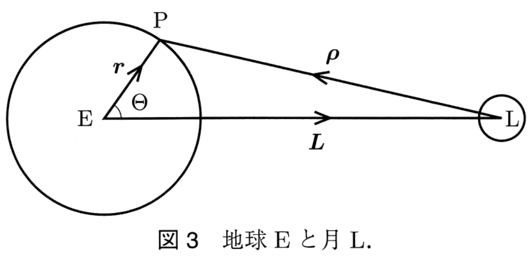


図 3　地球 E と月 L.

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM}{|\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}|^3}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{E}}) - \frac{G\mu}{|\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}|^3}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}) \approx -\frac{GM}{L^3}\boldsymbol{L} \tag{3}$$

となる．ただし (2), (3) の最後の近似は海水の微小部分の質量 μ は M, m に較べて小さいとして無視した．位置座標の時間依存性はこれらの方程式を解くことによって定められる．

さて $\boldsymbol{L}$ の運動は (3) − (2) を計算すると，

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{G(M+m)}{L^3}\boldsymbol{L} \tag{4}$$

で定められる．これは月が地球の周りを楕円を描いて公転していることを意味する．以下簡単のため，月は半径 L_0 の円運動をするとしよう．このとき月の公転の角速度は $\omega = \{G(M+m)/L_0^3\}^{1/2}$ となる（この周期は**恒星月**と呼ばれ，約 27.3 日）．

次に (1) から (2) を差し引くと，

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} - \frac{Gm}{\rho^3}\boldsymbol{\rho} - \frac{Gm}{L^3}\boldsymbol{L}. \tag{5}$$

ただし，$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{L}$. 第 1 項と第 2 項は海水に働く地球の重力と月の重力，第 3 項は地心に働く月の重力を逆向きにしたものである．海水に対する月の影響は，月による直接の重力ではなく，地球に働く月の重力を差し引いた力に依ることを示している．

第 3 項の力に対して，しばしば見かける初等的な説明として，「月の重力と逆向きに働く力は地球と月の共通重心で考えたときの遠心力」というのがある．しかし，この説明は誤りである．なぜなら，月が公転していても，していなくても，この項は存在するからである．

ここで，$|\boldsymbol{L}| = L_0$ は r に較べて十分大きいから，

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{|\boldsymbol{L} - \boldsymbol{r}|^3} \approx \frac{1}{L_0^3}\left(1 + 3\frac{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r}}{L_0^2} + \cdots\right)$$

と近似することができ，(5) は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} + \frac{Gm}{L_0^3}\left(\frac{3(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{L}}{L_0^2} - \boldsymbol{r}\right) \\ &= -\nabla_{\boldsymbol{r}} U(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L})\end{aligned} \tag{6}$$

と簡単化される．ただし，$\nabla_{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ は

ナブラと呼ばれるベクトル微分演算子で，しばしば grad と書いて，**グラディエント**または**勾配**と呼ぶこともある．ここで，

$$U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{L}) = -\frac{GM}{r} - \frac{3Gm}{2L_0^3}\left(\frac{(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r})^2}{L_0^2} - \frac{r^2}{3}\right). \tag{7}$$

この第2項は（海水単位質量当たりの）**潮汐ポテンシャル**と呼ばれる．月の公転により $\boldsymbol{L}$ は時間とともに方向を変えるから，$U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{L})$ は時間依存性を持っている．このため (6) のままでは取扱いが難しい．そこで，月の公転に合わせて回転する系，言い換えると $\boldsymbol{L}$ が $\boldsymbol{L}_0$（定ベクトル）に静止している回転系 $\boldsymbol{r}'$ に移るとしよう．そうすると月の運動は考えなくて済む．

その結果，そのような系ではエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\right)^2 + U_{\mathrm{cent}}(\boldsymbol{r}') + U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{L}_0) = \text{const.} = E \tag{8}$$

が成立することが分かる*1)．ただし，

$$U_{\mathrm{cent}}(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}')^2 - \omega^2 r'^2\right) \tag{9}$$

は月の公転に伴う**遠心力ポテンシャル**と呼ばれる．

この遠心力ポテンシャル $U_{\mathrm{cent}}(\boldsymbol{r}')$ は，海面を地球の赤道方向を膨らませ，地球の自転軸を重心とした扁平（いわゆる**パン・ケーキ型**）の**回転楕円体**にする効果がある．

さらに地球は1日の周期で自転しているので，この回転によっても地球自身の形はさらに強くパンケーキ型になる．地球の形がパン・ケーキ型になることを初めて指摘したのは，ニュートンの『プリンキピア』第III編の命題19，問題3であった．とてもエレガントな議論なので，読者に一読をお薦めする．

地球の自転による効果に較べると，月の公転の影響は $(1/27.3)^2 \approx 10^{-3}$ と，ずっと小さいので無視して良い．結果のパン・ケーキ型の形は**ジオイド**と呼ばれ，赤道方向の膨らみは約 20 km 程度である．しかし，この膨らみは地球の平均半径 $R = 6370\,\mathrm{km}$ に較べて十分小さいし，月の位置座標 $\boldsymbol{L}_0$ によらないから，潮汐現象には直接関係ない．

以下では地球の自転と $U_{\mathrm{cent}}(\boldsymbol{r}')$ は無視することにする．後でわかるように，潮汐による高さ変化は 1 m の程度であり，ジオイドの膨らみ具合はそれよりずっと大きいが，海面の形という点で考えると，その効果は全く異なる．物理では大きな効果であっても，関係のないものを無視して，本質に関わる小さい効果を浮き立たせることが重要なのである．例えば，超伝導現象の説明においては，多体効果の影響の結果，超伝導が起こったときのエネルギー・スペクトルと元々のフェルミ面の変化とを較べると，後者の変化のほうがずっと大きいが，こちらのほうは無視して議論するのである．

ここで，海水は静止しているとすると（潮汐平衡理論），条件 $U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{L}_0) = E$ が海面の形を決める．地球の半径を R，潮汐の海面の高さを h とすれば，$r = R + h$ だから，$R \gg h$ として，

$$-\frac{GM}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right) - \frac{Gm}{2L_0^3}\left(\frac{3(\boldsymbol{L}_0\cdot\boldsymbol{r})^2}{L_0^2} - r^2\right) = E.$$

したがって，

$$h = \frac{mR^4}{2ML_0^3}\left(3\cos^2\Theta - 1\right) + \text{const.}$$

---

*1) 地球の中心を原点とし，月が静止している座標系 $\boldsymbol{r}'$ を考えると，月の公転の角速度ベクトルは $\boldsymbol{\omega}$ だから，運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} = -2\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') - \nabla_{\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{L}_0)$$

となる．ここで，第1項はコリオリの力，第2項は月の公転に伴う遠心力を表す．

この運動方程式の（海水の質量当たりの）**ラグランジアン**は，

$$L' = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\right)^2 + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} - U_{\mathrm{cent}}(\boldsymbol{r}') - U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{L}_0)$$

と書ける．ただし，$U_{\mathrm{cent}}(\boldsymbol{r}')$ は本文 (9) の遠心力ポテンシャル．これより，**ハミルトニアン**に移行すると，$\boldsymbol{p}'$ を**正準運動量**として，

$$H' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{\omega}_\times\boldsymbol{r}')^2 + U(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{L}_0) + U_{\mathrm{cent}}(\boldsymbol{r}')$$

が得られ，H' は定数になることがわかる．ここで．変数を $\boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')$ に戻すと，本文 (8) のエネルギー保存則が得られる．

ただし Θ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{L}_0$ のなす角である（図 3 参照）．h の平均海面が 0 であるように決めると，最後の定数項は 0 となるから，結局

$$h(\Theta) = \Delta\left(\cos^2\Theta - \frac{1}{3}\right). \qquad (10)$$

ただし，Δ は潮の**満干差**と呼ばれ，

$$\Delta = \frac{3}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{R}{L_0}\right)^3 R \qquad (11)$$

である．

観測値 $m/M = 0.0123$, $L_0 = 384{,}000$ km を入れると満干差 Δ の値は約 0.54 m となる．海面の形は，地球の中心と月を結ぶ方向を軸とした偏長の「**ラグビー・ボール型**」の回転楕円体で，長半径が $R + 2\Delta/3$，短半径が $R - \Delta/3$ となることを意味している．

太陽の影響を同様に計算すると，M_s，L_s をそれぞれ太陽の質量と地心–太陽間の距離として，

$$\Delta_s = \frac{3}{2}\frac{M_s}{M}\left(\frac{R}{L_s}\right)^3 R \approx 0.24\,\mathrm{m} \qquad (12)$$

となり，月の影響の約 1/2 弱となる．満月や新月の時の**大潮**では影響は加算的となり満干差は最大で約 0.8 m となる．上弦の月や下限の月のときは**小潮**で，満干差は最大 0.3 m となる．

すでに述べたように，地球は完全な球ではないが，（パン・ケーキ型の）ジオイド面から測れば満干差の結果は変らない．

今までの議論ではっきり言わなかったが，海水は地球に「へばりついている」と簡単化したことに注意しておこう．実際，地球の自転の速さは赤道上で時速 700 km/h くらい，海水もほぼ同じ速度で回っており，地表に対して相対的に半日程度のゆっくりした周期で変化しているので，この簡単化は許される．

2. 潮汐の時間変化

前節の議論では，月は円軌道を描くとした．しかし実際の月の公転軌道は楕円で，**離心率**が $e = 0.055$ と大きいことである．遠地点と近地点ではそれぞれ $L = L_0(1 \pm e)$ となるから，Δ は平均値に較べて約 17% の増減がある．

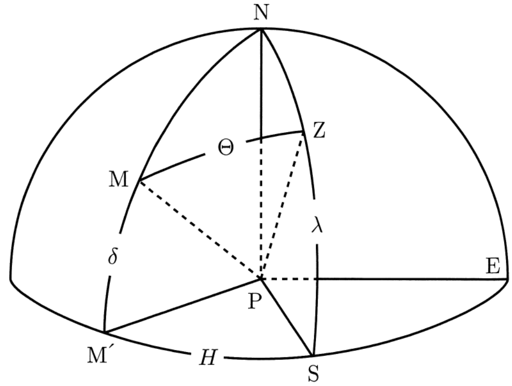


図 4　天球と月．N は天の北極，Z は観測点 P の天頂，大円 NZS は点 P の子午線，大円 M′SE は天の赤道，M は月の位置．

次に時間変化について，もう少し詳しく見てみよう．図 4 に示すように，観測点 P の地球上の緯度を $\lambda(=\angle\mathrm{SPZ})$，月の赤緯（天球上の緯度）を $\delta(=\angle\mathrm{M'PM})$，時角（点 P の天球上の経度から西向きに測った月の天球上の経度）を $H(=\angle\mathrm{SPM'})$ とすると，**球面三角法**により，$\Omega = \angle\mathrm{MPZ}$ は，

$$\cos\Theta = \sin\lambda\sin\delta + \cos\lambda\cos\delta\cos H \quad (13)$$

となるから，(10) を書き直して，

$$h = \frac{\Delta}{2}\biggl(\cos^2\lambda\cos^2\delta\cos 2H + \sin 2\lambda\sin 2\delta\cos H + 3\left(\sin^2\lambda - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2\delta - \frac{1}{3}\right)\biggr) \quad (14)$$

が得られる．H は 1 太陰日（約 24 時間 50 分）で 2π だけ変わるから，$\cos 2H$ に比例する項は 1 日に $H = 0, \pi$ の 2 度満潮が来ること（**半日潮**）を意味し，赤道地方（$\lambda = 0$）で最大となる．$\cos H$ に比例する項は 1 日に 1 度 $H = 0$ のときに満潮が来ること（**1 日潮**）を意味し，中緯度地方（$\lambda = \pi/4$）で最大となる．この 1 日潮のため，月が南中するとき（$H = 0$）の潮位のほうが $H = \pi$ のときの潮位より高い．最後の項は**赤緯潮**と呼ばれる．月の天空での軌道（**白道**と呼ばれる）が太陽の軌道（**黄道**と呼ばれる）からずれているのと，黄道自体が**天の赤道**（地球の赤道面と天空の交線）から傾

いているため，δ が変化する．赤緯潮はその変化に対応した長周期の約 13 日半（交点月の半分）と半年を持つ．

実際の潮の満ち干は月の運動と一致せず，6 時間ほどずれることがある．これを説明するには地球に固定した座標系に移り，**コリオリの力**なども含めて，流体力学を用いて検討しなければならない．地形の影響などもあり一般的に取り扱うのは海洋学の問題となるので，ここでは議論しない．

3. 土星の輪

衛星に働く惑星の潮汐力が衛星自身の重力より大きくなると，衛星は粉砕される．土星の輪はこのようにしてできたと考えられている．

惑星（今の場合土星）の質量を M，半径を R，衛星の質量を m，半径を r，惑星と衛星の距離を L とする．1 節と同じ記号を使っても混同はしないだろう．衛星に働く主な力は衛星自身の重力と主惑星による潮汐力だから，衛星のポテンシャルは

$$U(\boldsymbol{r}) = -\frac{Gm}{r} - \frac{GM}{2L^3}\left(\frac{3(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r})^2}{L^2} - r^2\right). \tag{15}$$

第一項は衛星自身の重力，第二項は惑星による潮汐力を表す．これより衛星に働く加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ は，

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{Gm}{r^3}\boldsymbol{r} + \frac{GM}{L^3}\left(\frac{3(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r})}{L^2}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{r}\right) \tag{16}$$

となる．$\boldsymbol{r}//\boldsymbol{L}$ 方向で加速度が釣合う条件は，

$$\frac{Gm}{r^2} = \frac{2GMr}{L^3}.$$

このとき，惑星と衛星の平均密度をそれぞれ ρ_M，ρ_m とすると，

$$\frac{L}{R} = \left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}\left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{2\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3}. \tag{17}$$

これより惑星と衛星の距離が小さくなると衛星は粉砕されてしまうと考えられる．簡単のため $\rho_M = \rho_m$ とすると，$L/R = 2^{1/3} = 1.26$ となる．もっと精密に計算すると $L/R = 2.44$ となり，これは**ロッシュの限界**（1850）と呼ばれる．

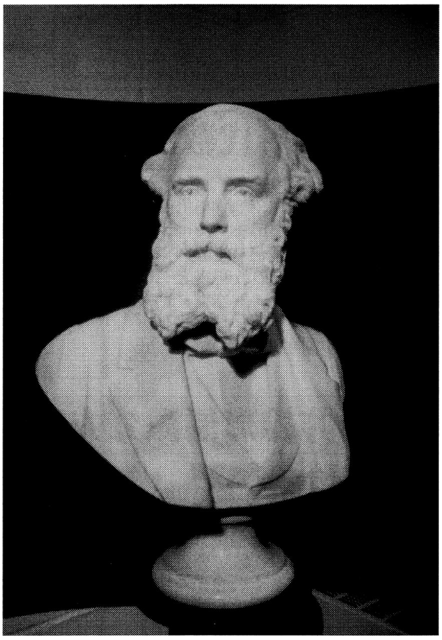


図5　クラーク・マクスウェル（1831–1879）．（ケンブリッジ大学キャヴェンディッシュ研究所にて1973年筆者撮影．）



図6　クリスティアーン・ホイヘンス（1629–1695）．（Caspar Netscher 画（1671），ハーグ歴史博物館．）

ただしこの考察には，物質の凝縮力などは考慮されていない．もし凝縮力が考慮されれば，粉砕限界はもっと近くになるであろう．

土星の場合は $R = 60,330\,\mathrm{km}$，輪の存在領域は $L = 74,400 \sim 136,600\,\mathrm{km}$ となっている．L/R に直すと，1.2から2.3の範囲となっている．

後年，マクスウェルは土星の輪の安定性について研究し，輪は多数の小さな粒からできていることを明らかにした．これはケンブリッジのセント・ジョンズ・カレッジから出された1857年の懸賞問題「土星の輪の運動」の応募論文で，**ストークス**が激賞し，彼が見事アダムズ賞を受賞した研究である（論文の出版は1859年[3]）．

土星を観察したのはガリレオが初めて（1610年7月）であるが，彼の望遠鏡では，はっきり輪とは認識されなかった．ガリレオは，メガネのように見えるスケッチを1623年の著書**『贋金鑑識官』**に発表している[4]．これを空気望遠鏡を使った観測により，薄い板状の輪であるとしたのは，**ホイヘンス**である（1655年）[5]．同じ年，彼は土星の衛星タイタンも発見した[6]．土星もガリレオの木星と同じように衛星を持っている！ その後観測技術は進み，パリ天文台長だった**G. カッシーニ**は輪が隙間を持っていることを見つけた（1675年）．さらにその後**エンケ**は内側の輪にも隙間があることを見出した（1837年）．これら三つの輪や衛星はチョット良いアマチュア用の望遠鏡で区別することができる．

ちなみに1節で議論したジオイドの原因となる遠心力の公式を初めて見出したのは，ホイヘンスであった（1659年）[7]．

参考文献

1) ガリレオ（青木靖三訳）『天文対話（下）』（岩波文庫，[1961], 1979），p.191ff.

2) ニュートンのラテン語著書，通称『プリンキピア』(1687)には幾つか和訳がある．例えば，河辺六男編，中公バックス『ニュートン』（河出書房，1979）の中の河辺六男訳『自然哲学の数学的諸原理』．アイザック・ニュートン著（中野猿人訳），『プリンシピア』（講談社，[1977], 1979）．第III編命題24（p.526ff）で潮の満ち干について論じている．

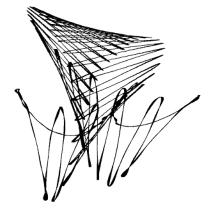
数学的なところを著者自身の方法で解説したものに，S. チャンドラセカール（中村誠太郎 監訳）『チャンドラセカールの「プリンキピア」講義』（講談社，1998）第21章（p.381ff.）

3) J. Clerk Maxwell, "On the Stability of the Motion of Saturn's Ring" (Cambridge: Macmillan

and Co., 1859).
4) 豊田利幸編，中公バックス『ガリレオ』（中央公論社，1979）中の豊田利幸訳『贋金鑑識官』第 49 章．
5) C. Huygens, “Systema Saturnium”, (Hagæ-Comitis, 1659).
ホイヘンスの著作は膨大で，60 年をこえる長い時間をかけて編集されたラテン語の全集がある：“Oeuvres complètes de Christiaan Huygens”, Vols.22 (La Haye: Martinus Nijhoff, 1888–1950).
本編は『全集』の第 15 巻に収録されている．部分訳は，原亨吉 編『ホイヘンス　光についての論考 他』（朝日出版社，1989）中の安藤正人訳「土星の体系」．
6) 『全集』の第 16 巻に収録されている．翻訳は，原亨吉 編『ホイヘンス　光についての論考 他』（朝日出版社，1989）中の安藤正人訳「土星の月についての新観測」．
7) 『全集』の第 16 巻に収録されている．翻訳は，原亨吉 編『ホイヘンス　光についての論考 他』（朝日出版社，1989）中の横山雅彦訳「遠心力論」．

（さいとう・もとひこ，大阪大学名誉教授）

電磁気学教育の個人的体験から



川 村　清

1. はじめに

編集部からいただいた「お題」は，電磁気学に関する「論理と思考を深める最高の材料となる面白い発想」である．

考えてみると，電磁気学について講義をしたり本を書いたりするうちにも，何かと分からない問題や苦手な問題に悩まされてきた．ここでは，それを何とか解決してきたことについて披露することにした．電磁気学の裏話のようなものなので，かえってそれが何人かの読者の個人的な悩みを解決するのに役立つかもしれない．

最初の3節は今回書き下ろしたもの，残りの2節はどこかで書いたものをアレンジし直したものではあるが，その内容は，よく調べるといろいろな本[1)]のどこかに書いてあることだから，どれも私のオリジナリティーを主張するつもりはない．

2. アクチュエータのための磁気力

慶應義塾大学で理工学部1年生に電磁気学を教えていた頃，機械工学科の4年生が訪ねてきた．その学生は，アクチュエータの設計をしていて，その動作のために永久磁石に働くコイルの磁気力を使いたいが力の計算法が分からないという．現実の強磁性体の磁気的性質は大変複雑で，たじろぎかけたが，ともかく一緒に考え始めた．正確なところは忘れてしまったが，彼が考えた装置の本質的部分は，図1に示したようなものであった．

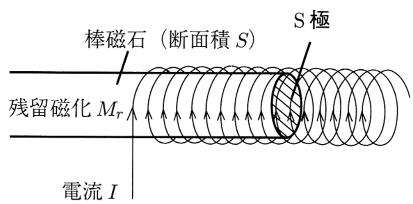


図1　ソレノイドに引き込まれる棒磁石．

この装置は，単位長さ当たり n 巻きのソレノイドとそこに差し込んだ断面積が S で，**残留磁化**が M_r の**永久磁石**の一様な棒，すなわち棒磁石とからなる．棒磁石の右端がS極（負磁極），左端がN極（正磁極）とする．この棒は十分長く，左端はソレノイドの端から十分遠方にあるとする．彼は，強さ I の電流を図のように流すと，棒磁石はソレノイドに吸い込まれるはずだと推測したが，それでは，その力の大きさをを求めるにはどうしたら良いか，ということを聞きに来たのである．

現代風に棒磁石に流れる磁化電流とそれがソレノイドの磁場から受けるローレンツ力を考えると迷路に入りそうだから，私が昔習った磁性体物理の古いパラダイムを使って考えることにしよう．それによると，棒磁石のN極には正の磁荷が集まり，S極には負の磁荷が集まっている．そして，磁場 H の中に置かれた磁荷 Q_m には，

$$F = Q_m H \tag{1}$$

という力が働く．これは，電場中の電荷に働く力

の公式と全く同じ形である．

まず，この公式中の H を与えられた物理量で表すことを考えよう．棒磁石の内外の磁場なるものはいろいろな本に複雑な磁力線で描いてあって，「ビビる」かも知れないが，その必要はない．ここでは棒磁石に対するソレノイドの電流の効果を考えるのだから，磁場としてはソレノイドが作るものだけを考えれば良く，ソレノイドの内部の磁場の強さは次のようになる．

$$H = nI. \tag{2}$$

ただし，ベクトル量はそれが左向きのとき正の値をもつものとする．n と I の意味は上に記した．

ソレノイドの外では，磁場の強さはソレノイドから離れるに従って減少していく．その様子を式で書けと言われると困ってしまうが，ソレノイドが作る磁場の棒磁石の右端での値を $H_r(= nI)$，左端での値を H_l とし，N 極と S 極にある磁荷を，それぞれ，Q_m および $-Q_m$ として，棒磁石には

$$F = Q_m(H_l - H_r) \tag{3}$$

という力が働くことになるから，棒磁石の両端の H での値が分かれば十分である．棒磁石の左端は十分遠方にあるとすれば，$H_l = 0$ としてよいから，(2) 式の H の表式を (3) 式の H_r に使うと

$$F = -Q_m nI \tag{4}$$

となる．上で述べた符号の定義によると，棒磁石はソレノイドの中に引き込まれることが分かる．

これから先に進むには，Q_m の値を棒磁石の材料の残留磁化の値を使って表さなくてはならない．そのために，磁石は正負同数の磁荷の集合であるという磁性体の古いモデルを使う．物質の磁性は電子スピンが担っていることを思うとこれで磁石を議論できるのかと不安になるようなモデルであるが，今考えているようなシステムを非常に簡単に磁気学的に考察できる便利なモデルである．

このモデルでは，磁気を帯びていない物質中では磁気量が $+q_m$ と $-q_m$ の磁荷はそれぞれ一様な密度で分布していると考える．その物質に磁場を

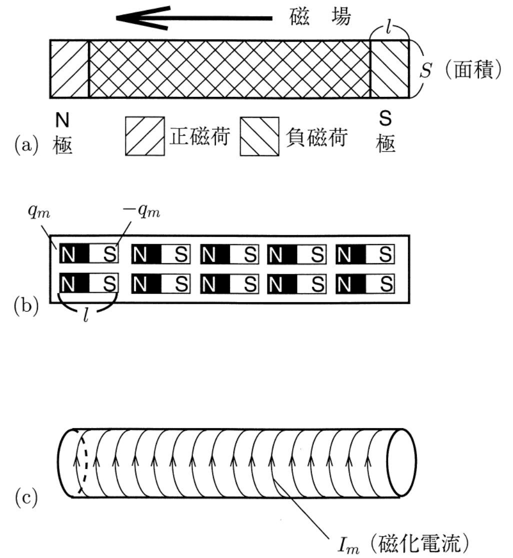


図 2　永久磁石の 3 つのモデル．(a) 磁気分極モデル．(b) 双極子モデル．(c) 磁化電流モデル．

加えると，図 2 (a) のように正磁荷の分布は磁場の向きに，負磁荷の分布は磁場とは反対向きに変位する．これが磁化された状態のモデルである．似たようなものは，誘電体の電磁気学では電気分極のモデルとして使われているから，ここに示した磁化のモデルを**磁気分極モデル**と呼ぶことにする．

正磁荷が負磁荷に対して距離 l 変位したときの一対の磁荷を磁気双極子と呼び，磁荷 $-q_m$ から q_m を見た位置ベクトルと向きが同じで，大きさが $m = q_m l$ のベクトルを**磁気双極子モーメント**，あるいは簡単に，**双極子モーメント**と呼ぶ．双極子モーメントは $\boldsymbol{m}$ と表す．また，単位体積中の磁気双極子モーメントを**磁化ベクトル**あるいは簡単に**磁化**と呼び，記号 $\boldsymbol{M}$ で表す．

強磁性体と呼ばれる強い磁気を帯びた物質は，一度磁場によって磁化されると，磁場を取り除いても磁化が残ることがある．このときの磁化が残留磁化で，永久磁石とは，磁場を加えなくても残留磁化を帯びているものをいう．

図 2 (a) において，正負の磁荷の磁荷密度を $\pm\rho_m$ とし，正磁荷の負磁荷に対する相対的変位の大きさを l，右端と左端に現れる磁荷をそれぞれ $-Q_m$ お

よび $+Q_m$ とすると，$Q_m = \rho_m Sl$ である．ここに出てきた $\rho_m l$ は単位体積あたりの双極子モーメント，すなわち，磁化の大きさだから $Q_m = MS$ となる．

この結果を (4) 式に代入すると，棒磁石の右端に働く力は，

$$F = -nMSI \tag{5}$$

となる．

3. 実用性の検討

ここで，(5) 式の力の大きさを見積もって，アクチュエータに使えるだけの力が出るかどうか考えてみよう．数値としては次のものを使う．

棒磁石としては断面積が 1 mm^2 の KS 鋼を使う．『理科年表』によると，KS 鋼の残留磁化 M_r は MKSA 単位系で 0.9 T である．したがって，磁極の大きさ $Q_m = M_r S$ は，ほぼ 1.0×10^{-6} Wb である．他方，ソレノイドは 1 cm あたり 10 回巻き，そこに 1.0 A の電流を流すとすると，その中の磁場の強さは 1000 A/m である．

以上の値を使うと，(5) 式で表される力の大きさは，およそ $F = 10^{-3}$ N（=0.1 グラム重）にすぎず，とてもアクチュエータには使えないだろう．そこで，図 3 のようにソレノイドのほうに鉄芯を入れて，ソレノイドの磁場を強くしてみよう．

ソレノイドとそれを巻き付けてある鉄芯を一体化して，永久磁石のところに強い磁場を作る図 3 のような装置を**電磁石**と呼ぶ．鉄芯も永久磁石と同じ強磁性体だと聞くと，鉄芯が作る磁束線もさぞや複雑と思うかもしれないが，この鉄芯はソレノイド中の一様な磁場で磁化されているから，内部の磁束の分布も一様としてよいだろう．

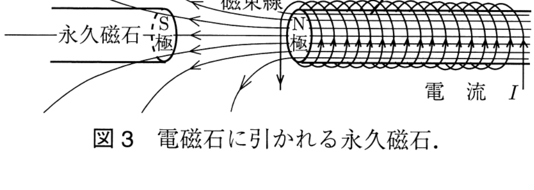


図 3　電磁石に引かれる永久磁石．

電磁石の鉄芯の中の磁場のうち，ソレノイドを流れる電流が作る磁場は，前と同じで $H = nI$ である．一般には，この磁場によって鉄芯が磁化され，それによって鉄芯の両端に誘起された磁荷が磁化とは向きが反対の磁場を鉄芯内部に作る．この磁場は**反磁場**と呼ばれるが，円柱形の鉄芯の長さが半径に比べて十分大きいときは無視できるほど小さい．そこで，鉄芯内部では実質的に $H = nI$ でよい．

ここで，鉄芯の中の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ とソレノイドの電流が作る磁場 $\boldsymbol{H}$ との関係を

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{6}$$

と表して鉄芯に使う物質の透磁率 μ を定義しておく．ただし，磁気力を利用しようとする強磁性体の透磁率は定数ではなく，$\boldsymbol{H}$ の関数である．

問題は外部の磁場だが，さしあたり，鉄芯の左端のごく近傍，左端からの距離が鉄芯の半径より十分小さいところを考える．すると，磁束密度は発散がないので，鉄芯の端の表面を挟んで，鉄芯外部の磁束密度は内部のそれと等しい値をもつ．

したがって，鉄芯の左側の大気中にできる磁束密度は $B = \mu nI$ となる．そこで，大気の透磁率も真空中と等しい μ_0 だとすると，そこでの磁場の強さは $H = (\mu/\mu_0)nI$ となる．この磁場が永久磁石に加える力は，鉄芯がない場合の μ/μ_0 倍だから，永久磁石の磁化として $M = M_r$ を使うと

$$F = M_r S \frac{\mu}{\mu_0} nI \tag{7}$$

となる．

鉄芯にふさわしい磁性体の透磁率は，『理科年表』なら「高透磁率材料」の項目の中に書いてある．永久磁石材料として上記のものを使い，鉄芯としては $\mu = 5000\mu_0$ の純鉄を使うと，この力の大きさは，上で求めたものの 5000 倍になる．

ただし，この計算は鉄芯から出た磁束線が広がらず，磁束密度が距離とともに減少しないという場合を想定している．磁束線が広がっていく効果を取り入れたければ，鉄芯の左端を面密度 μnI で磁荷が分布する円盤とみなし，一般には，クーロ

ンの法則を使って数値積分をしなくてはならない．しかし，この円盤の半径と比べて永久磁石までの距離 r が十分大きいときは，$Q_m = \mu nIS$ の点磁荷が鉄芯の左端の位置にあったとして，それから距離 r の場所の磁場をクーロンの法則で計算すれば良い．オーダとしては，(7) 式に (S/r^2) をかけた程度である．

4. いろいろなモデルの比較

図 2 (a) の磁気分極モデルは，正負 2 種類の磁気単極子の集団があると仮定している点で，現実とはかけ離れたモデルである．したがって，より現実的なモデルで磁気力が働くメカニズムを考え，磁気分極モデルと同じ結果が得られることを導いてみる．

現実の磁性体は，電子スピンが担うミクロな磁気双極子の集合体である．すなわち，残留磁化をもつ棒磁石は図 2 (b) に示したように磁気双極子が向きを揃えて並んでいるというモデルで表される．これを永久磁石の**双極子モデル**と呼ぶことにする．ただし，磁性イオンのスピンはこのようにきれいに揃ってはいない．ここに描いた磁石の絵は，多数の（巨視的量の）スピンの集団の双極子モーメントの和であって，いわば集団中の多数派の磁気モーメントの向きを表している．

ところで，一様な磁場に平行に置かれた双極子では，正負の磁極に働く反対向きの力が釣り合い，合力が 0 になる．しかし，両極の位置での磁場の強さが異なると，すなわち，磁場の強さに勾配があると，力の均衡が崩れ，双極子に力が働く．実際，z 軸方向を向く非一様な磁場の中に大きさが m で同じく z 方向を向く磁気双極子があるとき，その磁気モーメントに

$$F = m\frac{dH}{dz} \tag{8}$$

という力が働く．

長さ L の棒磁石の中心軸に沿って z 軸を選び，右端は $z = 0$ にあったとする．磁化ベクトルを M とすると，$z \sim z + dz$ の間の磁気モーメントは $SM(z)dz$ で，これを (8) の m に代入し，得られた微小な力を棒磁石全体にわたって足し合わせると

$$\begin{aligned} F &= \int_0^L SM\frac{dH}{dz}dz \\ &= SM[H(L) - H(0)] \end{aligned} \tag{9}$$

となる．ここで，(3) 式の記号を使うと $H(L) = H_l, H(0) = H_r$ だから，磁気分極モデルと同じ結果である．

最後に，棒磁石には図 2 (c) のように円形の磁化電流が流れているとして，それに働くローレンツ力を計算しても同じ結果が得られることを示す．

z 軸の上に中心をもつリングを考える．このリングを通る磁束線の集合は z 軸の周りに対称な管（磁束管）を作る．z 軸に垂直な面上で，z 軸から管までの距離を r とする（図 4 参照）．磁束線は z 軸に平行ではなく，r は z とともに緩やかに変化するものとする．

磁束管の中の磁束密度は管の断面積に反比例し，近似的に

$$B(z) = \frac{\Phi_0}{\pi r^2} \tag{10}$$

と表されるとする．

磁束管の外周に沿って，$z \sim z + dz$ の領域を流れる円形の磁化電流を $I_m dz$ とする．これに働くローレンツ力の向きは電流の向きと磁束密度の向きの両方に垂直だから，図に示したように右向きの成分を持つ．そのため，この円電流は右向きの力を受け，棒磁石は右に引かれる．この力の大きさは円周上の単位長さ当たり $I_m B dz$ だから，リ

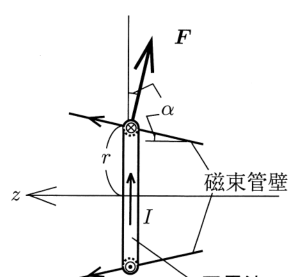


図 4　磁化電流に働くローレンツ力 $\boldsymbol{F}$.

ング全体が受けるローレンツ力の右向きの成分は

$$dF = 2\pi r I_m B \sin\alpha dz \tag{11}$$

となる．

リングを横切る点で磁束線に引いた接線の勾配は，

$$\frac{dr}{dz} = \tan\alpha \simeq \alpha \tag{12}$$

となる．ここでは，α は十分小さいと仮定した．

(10) 式と (11) 式より

$$\alpha \simeq \frac{dr}{dz} = -\frac{1}{2B} r \frac{dB}{dz} \tag{13}$$

が導かれる．(11) 式でも $\sin\alpha \simeq \alpha$ と近似して，(13) 式を代入すると

$$dF = \pi r^2 I_m \frac{dB}{dz} dz \tag{14}$$

を得る．

ところで，ソレノイドの場合，nI はソレノイドの単位長さを流れる電流であり，これがソレノイドを貫く磁場の強さ H に等しい．これと類似に，単位長さの円筒の周囲を流れる磁化電流の強さ I_m は，その磁性体の磁化ベクトルを使って M/μ_0 と等しい．したがって，(14) 式の力を棒磁石全体で加え合わせると，

$$F = \int_0^L \frac{MS}{\mu_0} \frac{dB}{dz} dz \tag{15}$$

となり，(9) 式が得られる．このことは，双極子モデルと磁気分極モデルが現代的な円電流モデルと同等であること，したがって，考えやすいモデルを使って磁気力を見積もれば良いことを意味している．

5. マイスナー効果の電磁気学

超伝導体物理は，固体物理学の１章であって，大学初年度で触れる必要はないと多くの教員は思ってはいないだろうか．もちろん，BCS（Bardeen–Cooper–Schrieffer）理論だとか，GL（Ginzburg–Landau）方程式だとか，学部４年生でも手に負えない話題が大部分である．しかし，現象そのものはよく知られているし，実際，学生実験で超伝導体を扱うこともあるだろう．だとすれば，超伝導体を腫れ物に触るような扱いをせず，各学年で理解できる範囲でいろいろ話題にすべきである．それによって，学生に広い視野と新たな知的好奇心を抱かせることができると思う．ここで述べることは慶應義塾大学の理工学部１年生の電磁気学の授業中に演習問題として取り上げたという実績がある．

超伝導体は電気抵抗がなくなるので完全導体であるかのように考えられがちだが，それは間違っている．実際，完全導体なら $\boldsymbol{E} = 0$ でなくてはならない．すると，ファラデーの法則

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

より，超伝導体中では磁束密度が変動できないことが導かれる．

ところで，臨界温度 T_c より高い温度で，超伝導物質を磁場中に置く．その温度では，通常の導体だから，磁束線がその物質の内部に入る．その状態で急冷して温度を T_c 以下にもっていくとその物質は超伝導状態になるが，そのとき，この物質から磁束が排除される．このように，超伝導体中に磁束が入れないという性質を**マイスナー効果**という．急冷した超伝導体からマイスナー効果によって磁束が排除される過程で物体内部の磁束密度が有限な値から０にまで減少しなくてはならないが，これは完全導体ではあり得ないことである．したがって，超伝導体は完全導体ではない．

一方，超伝導体は完全反磁性という際立った磁性を示す．マイスナー効果も完全反磁性であることの一つの表現である．完全反磁性とは，$\boldsymbol{M} = \chi \boldsymbol{H}$ で定義される磁化率が

$$\chi = -\mu_0 \tag{17}$$

と表され，磁場ベクトルとは反対向きに磁化される性質をいう．したがって，超伝導体中では，$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}$ で定義される磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が恒等的に０になり，超伝導体は磁束を排除することが導かれる．なお，この磁化ベクトルの源となる磁

化電流が電磁抵抗なしで流れる超伝導電流である．

それでは，球形の超伝導体に外から磁場を加えると，球の内外で磁力線や磁束線はどう変化するだろうか．

まず，外から加えた磁場 $\boldsymbol{H}_{ex}$ は至るところ一定であるとする．超伝導体の中の磁場ベクトルは，この外部磁場と磁化による反磁場 $\boldsymbol{H}_d$ の和で，これが超伝導体を磁化する．そこで，(17) 式を使うと，

$$\boldsymbol{M} = -\mu_0(\boldsymbol{H}_{ex} + \boldsymbol{H}_d) \tag{18}$$

という関係が導かれる．ここで，一様に磁化された球形の磁性体の内部には反磁場

$$\boldsymbol{H}_d = -\frac{1}{3}\boldsymbol{M} \tag{19}$$

が誘起されることを使うと，この 2 つの式から，

$$\boldsymbol{H} = \frac{3}{2}\boldsymbol{H}_{ex} \tag{20}$$

を得る．

マクスウェル方程式から導かれる電磁場の基本定理として，異なる物質（その一方は真空でもよい）がある面で接しているとき，$\boldsymbol{B}$ のその境界面に垂直な成分は連続に変化し，$\boldsymbol{H}$ の境界面に平行な成分は連続に変化するというものがある．今の場合，球の内部で $\boldsymbol{B} = 0$ だから，球のすぐ外側では，$\boldsymbol{B}$ の球面の法線成分は 0 でなくてはならない．その結果，球のすぐ外側では，磁束線は表面に沿う．このことと，十分遠方では磁場に対する超伝導体の影響はなく，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{ex}$ で一定であることを使うと，磁束線の分布はおよそ図 5 (a) に実線で示したようになる．

一方球の外では $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ だから，磁力線は磁束線と平行であるが，球の中では，(20) 式から分かるように一様な外部磁場 $\boldsymbol{H}_{ex}$ に平行になり，図 5 (a) に破線で示したようになる．また，図 5 (b) のように，地球の緯度に対応する角度 θ を使うと，磁場ベクトルの球面に平行な成分は $H_t = H\cos\theta$ であるが，これが球面を挟んで連続に変化するから，球のすぐ外側での磁束密度の大きさは θ とともに

$$B(\theta) = \mu_0 H_t = \frac{3}{2}\mu_0 H_{ex}\cos\theta \tag{21}$$

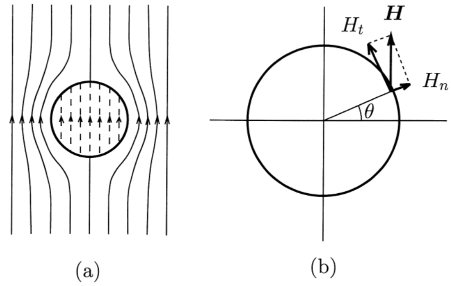


図 5　(a) 超伝導体球の周囲の磁束線（実線）と内部の磁力線（破線）．(b) 球面すぐ内側での磁場ベクトルの面に平行な成分と垂直な成分への分解．

と変化する．

6. 磁場中電荷のハミルトニアンの導出法

私が

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\phi(\boldsymbol{r}) \tag{22}$$

というハミルトニアンに出会ったのは大学院に入って，何かのセミナーに参加したときだったと思う．学部のときに，解析力学の講義はあったが電磁場中の荷電粒子の正準理論は習わなかった．量子力学の時間にも磁場は出てこなかった．こういうものは電磁気学の時間に，例題を解きながらしっかりと勉強しておいたほうが良い．

私は，3 年生の電磁気学の時間に (22) 式を次のように導いてみせた．まず，質点の運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U が定義できるとき，ラグランジアン L は，$L = K - U$ によって定義される，といって解析力学のことを思い出してもらう．しかし，電磁場中の荷電粒子に働く力のうち，$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ のポテンシャルがないから，磁場の効果をラグランジアンに書くためには一工夫必要である．正当派の講義なら，仮想仕事を使って導く[2)]ところだが，私はむしろ次のように発見的方法で導いた．結果を忘れてしまったときに思い出すには便利な方法である．

まず，電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ の場の中にある電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の荷電粒子のポテンシャルエネルギーは

$$U = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})dV \tag{23}$$

となる．しかし，これではローレンツ変換に対して不変ではない．そこで，ベクトルポテンシャルも使って，ローレンツ変換に関して不変な形にしよう．そのために，(23) 式の被積分関数は，4 元電流

$$\boldsymbol{j} = (\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \mathrm{j}_3, \mathrm{j}_4) = (j_x, j_y, j_z, ic\rho) \tag{24}$$

と 4 元ポテンシャル

$$\boldsymbol{A} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4) = \left(A_x, A_y, A_z, i\frac{\phi}{c}\right) \tag{25}$$

の第 4 成分を使って，$-j_4 A_4$ と書けることを思い出す．すると，ローレンツ変換に対して不変な積分は

$$U = -\int_V \sum_{n=1}^{4} \mathrm{j_n A_n} dV \tag{26}$$

と書けることが分かる．そこで，点電荷の場合は，$\boldsymbol{r}_0$ を点電荷の位置として，

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \tag{27}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = q\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \tag{28}$$

となることを使って dV 積分を実行し，さらに，運動エネルギーの項も加えると，ラグランジアンは，

$$L = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 - q\phi(\boldsymbol{r}) + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{29}$$

となることが分かる．ここで，$\boldsymbol{r}_0$ は $\boldsymbol{r}$ と書き換えた．

はじめから点電荷のポテンシャルエネルギー $q\phi$ を使うと電荷のほうを 4 元ベクトルで書きにくいので，連続体の公式を使ったところがミソである．

正準運動量はラグランジアンから，

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A} \tag{30}$$

と導かれる．そこで，ハミルトニアンは，

$$\begin{aligned} H &= \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - L \\ &= \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\phi \end{aligned} \tag{31}$$

となる．もちろん，ハミルトン方程式がローレンツ力を含む運動方程式になることも確かめさせた．

7. 謝辞

最初のアクチュエータのサイズや電流値については宮島英紀氏に相談に乗っていただいた．ただし，簡単なメールのやり取りだったから，不適切な記述があったとしても宮島氏にはいっさい責任はない．

参考文献

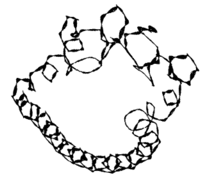
1) ここで議論していることは，次の本のどこかに書いてある．川村清：『電磁気学』（岩波基礎物理シリーズ）岩波書店 (1994); 太田浩一：『電磁気学 I，II』丸善 (2000); 長岡洋介：『電磁気学 I，II』（物理入門コース 3，4）岩波書店 (1982, 83); 中山正敏：『物質の電磁気学』（岩波基礎物理シリーズ）岩波書店 (1996).

2) 牟田泰三：『電磁気学』（岩波講座現代の物理学 2）岩波書店 (1992).

（かわむら・きよし，慶應義塾大学名誉教授）

熱力学

エントロピーをつくる



佐々　真一

1. パズル

断熱壁で囲まれた箱が二つある．それぞれの箱には異なる温度の理想気体が封入されている．例えば，20℃と40℃としよう．二つの箱をくっつけて，接触している壁の近くに透熱壁（熱を透過する壁）を仕事をしないように挿入し，接触している壁を仕事をせずに取り払う．すると，二つの箱の中にある気体の温度は変化し，最終的にはどちらも30℃になる．ここで，この逆操作を行う．仕切りとして入れられた透熱壁の近くに二つの断熱壁を仕事をしないように挿入し，仕切り壁を仕事なしで抜く．そして，二つの箱を切り離す．このとき，当然ながら温度は変化しないので，どちらの気体の温度も30℃のままである．つまり，元に戻っていない．

ここで，壁の出し入れの他に，壁をピストンで動かす操作も許すとする．このとき，二つの箱の体積が最初と同じで温度がともにθになる変化を与える操作で，その逆操作を行うことで元の状態に戻せる場合はあるだろうか（図1）？ 答えが与えられれば検証するのは簡単にできるが，答えを見出すのは簡単ではない．熱力学の知識があれば，「約$\theta = 29.835$℃の場合のみ可能である.」と答えられるが，その場合でもこの操作を具体的に見出すには時間がかかるだろう．

このパズルの解答は，以下で説明する．野心的な読者は，まず1時間くらいこのパズルに取り組まれたい．集中講義等で話題にした経験からすると，数理的な知識や経験と関係なく，物理的イメージをしっかり持てて柔らかい発想ができる人は解けるようである．ただし，最終節で述べるように，頭の固い筆者は何日かかっても綺麗に解けなかった．この記事の目的は，このパズルを通じて，**エントロピーに対する新鮮な視点を与えることである．**

2. エントロピーが腑に落ちない理由

熱力学の主役がエントロピーであることに異論

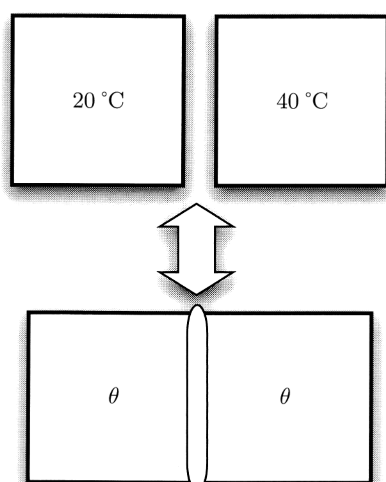


図1　20℃と40℃の理想気体を同じ体積の箱に同じ量だけ入れる．壁の出し入れとピストンによる体積制御だけで同じ温度にする．このとき，逆操作で元に戻る場合はあるだろうか．

を挟む人はいないだろう．エントロピーの導入によって熱的性質と力学的性質が統合され，不可逆性の程度も定量化される[1]．しかしながら，エントロピーを腑に落ちて理解するのは簡単ではない．標準的な教科書[2]では，第2種永久機関がないことを前提にして，温度と体積を変える操作における不等式（クラウジウス不等式）を導き，その等式成立の条件から状態変数であるエントロピーを定義する．これは，概ね，クラウジウスの原論文に沿った論法である．研究としてはその独創性に驚嘆するが，大学1, 2年生が初めて勉強するとき，その独創性を味わう余裕はなく，消化不良感が残る*1)だろう．

数学的には，クラウジウス不等式の等式成立条件が積分可能条件に対応し，積分経路に依存しない積分結果として状態変数の存在が主張される．そのとき，その積分可能条件に着目する理由が，結果論でしか分からない．物理的には，どのような性質を特徴づけるためにその量を導入したいのかが分からない．しいて言えば，「熱に関係した状態変数を考えたい」という動機に基づくが，「関係した」という言葉は曖昧である．従って，筆者が気持ちよくエントロピーを受け入れるためには，積分可能条件による変数の定義を直接には使わず，何か特徴づけたい性質を明確に表現する形で新しい状態変数を導入したい．この記事では，その動機を踏まえて，エントロピーの宣言から入る．そして，その宣言にしたがって実際にエントロピーの具体的な形を決める．得られた結果がクラウジウスによるエントロピーの定義であり，そのエントロピーをつくる過程で重要になるのが前節の例題である．

3. 熱力学の設定とエントロピーの宣言

単一の箱に封入された物質を単純系とよぶ．この記事では物質はすべて単純物質（内部エネルギー U，体積 V，物質量 N の組 $\varGamma=(U,V,N)$ によって単純系の平衡状態*2)が一意に指定される物質）であるとする．内部に仕切り壁がある箱に物質が封入された系（複合系）の平衡状態は，壁に囲まれた単純系の平衡状態 $\varGamma_i=(U_i,V_i,N_i)$ の組として，$(\varGamma_1;\varGamma_2;\cdots)$ のように指定される．孤立した複合系を構成する単純系をいくつか集めて一つの複合系と考えたものを部分系とよぶ．全体が平衡状態にあるとき，部分系の状態も平衡状態にある．部分系の平衡状態を単純系の平衡状態の組として $\varSigma$ と表す．以下では部分系のことを単に系ともよぶ．

単純系の平衡状態 $\varGamma$ の関数 $A(\varGamma)$ は状態量あるいは状態変数とよばれる．λ を任意の正実数とし，$\lambda\varGamma=(\lambda U,\lambda V,\lambda N)$ と記す．$A(\lambda\varGamma)=A(\varGamma)$（示強性）を満たす A が**示強変数**，$A(\lambda\varGamma)=\lambda A(\varGamma)$（示量性）を満たす A が**示量変数**であり，示量変数は $A(\varGamma_1;\varGamma_2;\cdots)=\sum_i A(\varGamma_i)$（相加性）により複合系の平衡状態の関数に拡張される．任意の状態変数は示量変数か示強変数のいずれかである．

平衡状態 $\varSigma_0$ にある系に対して，可動壁をピストンで移動させたり仕切り壁の出し入れを行った後，十分長い時間放置すると，別の平衡状態 $\varSigma_1$ に変化する．このような平衡状態間遷移を**過程**とよぶ．$\varSigma_0$ から $\varSigma_1$ への任意の過程において，外部から系にした仕事の総和が，状態 $\varSigma_0$，$\varSigma_1$ のみによって決まるように，系を壁で囲むことができる．このような壁を**断熱壁**，それ以外の壁を透熱壁とよぶ．断熱壁で囲まれた系の過程が**断熱過程**であり，$\varSigma_0\to\varSigma_1$ と記す．そのとき系がされる仕事（断熱仕事）と内部エネルギー変化が等しい．透熱壁で囲まれた系における過程では，系の内部エネルギー変化 $\varDelta U$ とその系がされる仕事 W は一般に一致しない．$Q=\varDelta U-W$ を系が熱の形

*1) この消化不良感をなくすために，「まずエントロピーありき」で出発する方法[3,4]もある．熱力学を体系的に理解することはできるが，逆にそのために「エントロピーとは何か」を考える機会を逸してしまうことになりかねない．エントロピーが好きな筆者としては，熱からエントロピーに至る「もやもやした感じ」を味わった後で，すっきりした体系に接してほしいと思う．

*2) 外部から遮断された巨視的な物質を十分長い時間放置して実現する状態．

でうけとったエネルギーであるとみなす．

ある断熱過程 $\Sigma_0 \to \Sigma_1$ に対して，逆向きの断熱過程 $\Sigma_1 \to \Sigma_0$ が何らかの操作で実現できるとき，その断熱過程を**可逆過程**[*3]という．可逆過程でない断熱過程が**不可逆過程**である．壁をゆっくり移動させるときのように，平衡状態が持続するとみなせてそのまま逆操作で逆に辿ることができる断熱過程は可逆過程の例である．

二つの単純系を熱接触（固定した透熱壁を介した接触）させたときにそれぞれの状態が変化しないなら，熱平衡が実現しているとよばれる．Γ と Γ' で熱平衡が実現し，Γ' と Γ'' で熱平衡が実現するならば，Γ と Γ'' で熱平衡が実現する．このことから，「任意の二つの平衡状態 Γ，Γ' が熱平衡にあること」と $\theta(\Gamma)=\theta(\Gamma')$ が等価になる経験温度 θ を決めることができる．

以上の設定の下で，エントロピーを次のように宣言する．

宣言：任意の可逆過程 $\Sigma_0 \to \Sigma_1$ に対して，$S(\Sigma_0)=S(\Sigma_1)$ となる示量変数 S をエントロピーとよぶ．

つまり，可逆性を特徴づける示量的量としてエントロピーを宣言する．こういう宣言から入ると筆者には気持ちが良い．ただし，論理的には，そのような変数が存在するかどうかは自明ではないので，「任意の可逆過程 $\Sigma_0 \to \Sigma_1$ に対して，$S(\Sigma_0)=S(\Sigma_1)$ となる示量変数 S が存在すること」を示さないと，この宣言が定義を与えない．また，存在したとしても，そのような変数が一意的に定まらないと定義に曖昧さが残る．隙のない完全な論旨を展開するなら，これらを一般論として抑える必要がある．ここでは，一般論を緻密に構成するのでなく，この宣言が意味している内容を具体的にみて，実際にエントロピーをつくる．結果として，この宣言がエントロピーの定義を与えることを確認する．

*3) この記事では，可逆とか不可逆の修飾語を断熱環境下の力学操作によって実現される過程に対してのみ適用する．ただし，熱浴（熱源）との相互作用がある系に対する場合でも，それらを含めた全体系に対する過程を考えるなら可逆とか不可逆という言葉は有効である．

4. 理想気体のエントロピーをつくる

話を簡単にするために対象を単原子理想気体[*4]に限定する．理想気体を単一の箱に入れる．そのときの平衡状態が $\Sigma_0=(U_0,V_0,N)$ とする．断熱条件下においてピストンでゆっくりと体積を V_1 まで変化させると，平衡状態が $\Sigma_1=(U_1,V_1,N)$ になった．断熱過程における仕事と内部エネルギー変化の等価性より，$U_1^{3/2}V_1=U_0^{3/2}V_0$ を得る[*5]．つまり，(U,V) 平面において，曲線 $U^{3/2}V=U_0^{3/2}V_0$ 上の状態へは Σ_0 から可逆過程で到達できる．前節の宣言にしたがって，$S(U,V,N)$ はこの曲線上で一定の値 $S(U_0,V_0,N)$ をとる．最初の状態を任意に選ぶことにより，一般に，$U^{3/2}V=\mathrm{const.}$ となる曲線（**断熱曲線**とよばれる）毎に $S(U,V,N)$ は一定の値をとる．また，S は示量変数だから，$S(U,V,N)=NS(U/N,V/N,1)$ を満たすことに注意する．以上により，ある 1 変数関数 $f(x)$ を使って，理想気体のエントロピーが

$$S(U,V,N)=Nf\left(\frac{U^{3/2}V}{N^{5/2}}\right) \tag{1}$$

と書ける．この段階で 1 変数関数 $f(x)$ は任意なので，エントロピーは一意に定まっていない．しかし，これまでの議論では単一の箱に入った場合についてのみ考えており，内部に仕切りがある箱における可逆過程についてはまだ議論していない．

ここで冒頭のパズルを思い出そう．断熱壁で囲まれた二つの箱の中に理想気体を封入し，それぞれ $\Gamma_{\mathrm{L}}=(U_{\mathrm{L}},V,N)$，$\Gamma_{\mathrm{R}}=(U_{\mathrm{R}},V,N)$ という平衡状態にあるとする．箱全体の平衡状態を $\Sigma_0=(\Gamma_{\mathrm{L}};\Gamma_{\mathrm{R}})$ と記す．この状態から $\Sigma_1=(2U_\sharp,2V,2N)$ への可逆過程を具体的に構成する．まず，二つの箱の経験温度を等しくしたい．理想気体の場合，U/N が等しいと経験温度が等しいので，(a) $\Gamma_{\mathrm{R}}=(U_{\mathrm{R}},V,N)$ からゆっくり体積を変化させエネルギーを U_{L} にする．このときの体積 V_{R} は

*4) 単原子理想気体の圧力 p が (U,V) の関数として $p=2U/(3V)$ と書けることを前提にする．

*5) $dU=-pdV=-2UdV/(3V)$ を積分する．

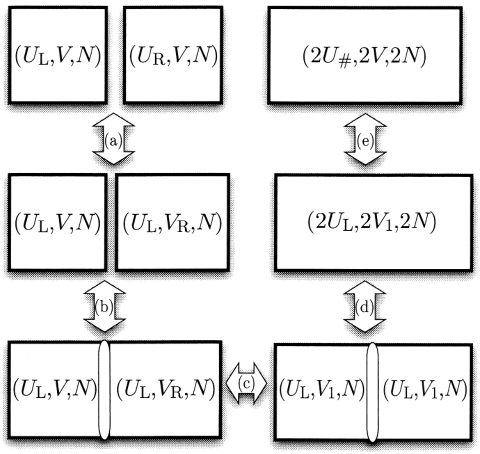


図 2 $(U_{\rm L},V,N);(U_{\rm R},V,N)$ から $(2U_\sharp,2V,2N)$ に可逆的に操作する．本文の説明を参照．

$$U_{\rm L}^{3/2}V_{\rm R}=U_{\rm R}^{3/2}V \tag{2}$$

により決まる．(b) 二つの箱を透熱壁で接触させ，内部の断熱壁を取り払う．次に，経験温度を一定に保ったまま，二つの箱の圧力を等しくしたい．そのために，(c) 左箱の体積を V から V_1 に，右側の体積を $V_{\rm R}$ から V_1 にゆっくりと変化させる．ここで，この過程における全仕事がゼロになるように V_1 を選ぶと，内部エネルギーが変化しないので経験温度は変わらない．それぞれの内部エネルギーが一定に保たれていることに注意して $p=2U/(3V)$ を積分すると，V_1 は

$$\log\frac{V_1}{V}+\log\frac{V_1}{V_{\rm R}}=0 \tag{3}$$

によって決まる．(d) 二つの箱の圧力と経験温度は等しいので，仕切り壁を取りはらっても状態は変化せず，箱の状態を $(2U_{\rm L},2V_1,2N)$ と書くことができる．(e) 最後に，体積 $2V$ までゆっくり体積変化させる．最終状態の内部エネルギー $2U_\sharp$ は

$$(2U_\sharp)^{3/2}(2V)=(2U_{\rm L})^{3/2}(2V_1) \tag{4}$$

を満たす．(2), (3), (4) より

$$U_\sharp=(U_{\rm L}U_{\rm R})^{1/2} \tag{5}$$

と求まる．以上の過程では平衡状態がずっと持続しているとみなせるので，そのまま逆操作を行うことで，逆にたどって最初の状態に戻れる．これが冒頭のパズルの解答である．

さて，このとき，$S(\Sigma_1)=S(\Sigma_0)$ より (1) における関数 f が絞られる．実際，

$$x=\frac{U_{\rm L}^{3/2}V}{N^{5/2}},\quad y=\frac{U_{\rm R}^{3/2}V}{N^{5/2}} \tag{6}$$

とおくと，

$$f(x)+f(y)=2f((xy)^{1/2}) \tag{7}$$

が成り立つ．x, y は任意の正実数でよいので，この解は*6)

$$f(x)=c_0+c_1\log x \tag{8}$$

である．c_0, c_1 は定数である．つまり，理想気体のエントロピーは

$$S(U,V,N)=c_0N+c_1N\log\frac{U^{3/2}V}{N^{5/2}} \tag{9}$$

となる．最後に仕切り壁がいくつあっても可逆過程で到達できる状態はこのエントロピーの和が一定となることを確認することで，前節の宣言にしたがったエントロピーの表現が求まったことになる．これは現在知られている理想気体に対するエントロピーの式と一致している．

5. 一般化そして抽象化

前節の例題を踏まえて，一般的な単純物質のエントロピー関数をつくる*7)ことを考えよう．エントロピーを定める基準状態を二つ選び，Γ_0, Γ_1 とする．ただし，$\Gamma_0\to\Gamma_1$ は不可逆過程として実現されるとする．この基準状態でのエントロピーの値を $S(\Gamma_0)=s_0N$, $S(\Gamma_1)=s_1N$ とおく．単純

*6) $f(x)$ が微分可能だとする．y を固定して x で微分して $x=1$ とおくと微分方程式 $zdf(z)/dz=c_1$ を得る．ここで，$z=\sqrt{y}$ で c_1 は定数．この微分方程式を解く．

*7) 正確には，断熱過程についていくつかの条件を前提にする．圧力 p が $p=p(U,V)$ として与えられていて，微分方程式 $dU+p(U,V)dV=0$ の解によって単純系の断熱曲線族が決まる．そのとき，一つの断熱曲線上には任意の経験温度がありえる．最後に，$U'>U$ に対して，断熱過程 $(U,V,N)\to(U',V,N)$ は実現できるが，(U',V,N) から (U,V,N) へは断熱過程で変化できない．

系の勝手な状態 $\varGamma$ に対するエントロピーの値を決めたい．

$\varGamma_0$ を通る断熱曲線上において，$\varGamma$ と経験温度が等しい $\varGamma_0'$ をとる．以下ではこの経験温度の値を θ とする．同じように，$\varGamma_1$ を通る断熱曲線上において，経験温度が θ となる状態を $\varGamma_1'$ とする．このとき，$\varGamma_0', \varGamma_1', \varGamma$ は経験温度が一定値 θ をとる等温曲線上にある（図 3 参照）．

簡単のため $\varGamma$ が二つの断熱曲線の挟まれた領域内にある場合を考える．そのとき，ある $0 < \lambda_* < 1$ をうまく選んで，仕切り壁を含む箱の状態 $((1-\lambda_*)\varGamma_0'; \lambda_*\varGamma_1')$ から等温曲線（図 3 の点線）に沿って $((1-\lambda_*)\varGamma; \lambda_*\varGamma) = \varGamma$ に到達するようにピストンで体積変化させたい．もちろん，ピストンで断熱操作する場合，経験温度は一般に変化するので，これはいつもできるわけではない．そこで次のように考える．まず，温度一定の熱源と接触させるなどして，経験温度を一定に保ったままゆっくりと体積を変化させると，$\varGamma_0$ から $\varGamma$ に状態変化する．この過程を $\varGamma_0 \xrightarrow{i} \varGamma$ と記す．この過程で系が受け取る熱を $Q_\theta[\varGamma_0 \xrightarrow{i} \varGamma]$ と書く（理想気体だと吸熱なので正の値をとる）．同様に $Q_\theta[\varGamma_1 \xrightarrow{i} \varGamma]$ も分かる（理想気体の場合は発熱するので符号はマイナスである）．これらの吸熱と発熱を打ち消すように λ_* を選ぶと断熱したまま温

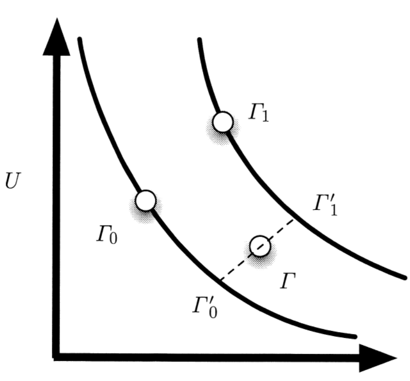


図 3　基準状態 $\varGamma_0, \varGamma_1$ を選び，それぞれの状態を通る断熱曲線を書く．状態 $\varGamma$ に対するエントロピーの値を決める．点線は経験温度が一定値 θ をとる等温曲線を表す．

度一定の線に沿って変化できる*8)．つまり，

$$(1-\lambda_*)Q_\theta[\Gamma'_0 \xrightarrow{i} \Gamma]+\lambda_* Q_\theta[\Gamma'_1 \xrightarrow{i} \Gamma]=0 \quad (10)$$

を満たすように選ぶ．ゆっくり体積変化する過程では平衡状態が持続しているとみなせるので，$Q_\theta[\Gamma'_1 \xrightarrow{i} \Gamma]=-Q_\theta[\Gamma \xrightarrow{i} \Gamma'_1]$ が成り立つ．従って，(10) より

$$\lambda_* = \frac{Q_\theta[\Gamma'_0 \xrightarrow{i} \Gamma]}{Q_\theta[\Gamma'_0 \xrightarrow{i} \Gamma'_1]} \quad (11)$$

を得る．この λ_* に対して，$((1-\lambda_*)\Gamma'_0;\lambda_*\Gamma'_1)$ から Γ へ可逆過程で変化できるので，エントロピーの宣言により，

$$S(\Gamma)=(1-\lambda_*)S(\Gamma'_0)+\lambda_* S(\Gamma'_1) \quad (12)$$

が成り立つ．$S(\Gamma'_0)=S(\Gamma_0)$, $S(\Gamma'_1)=S(\Gamma_1)$ なので，(12) は

$$S(\Gamma)=s_0N+(s_1-s_0)N\frac{Q_\theta[\Gamma'_0 \xrightarrow{i} \Gamma]}{Q_\theta[\Gamma'_0 \xrightarrow{i} \Gamma'_1]} \quad (13)$$

となる．これが一般の単純物質に対してエントロピーを熱測定で決める式*9)である．

ところで，λ_* より小さい λ を選ぶと，図 3 の点線上で Γ より Γ'_0 に近いところにそれぞれの箱の状態を可逆過程で変化できる．このとき断熱曲線に沿って Γ の体積まで膨張させると，内部エネルギーは Γ の内部エネルギーより小さくなる．そこでピストンを激しく振動させるなどして，内部エネルギーを上昇させ状態 Γ に到達することができる．その一方，最初と最後の体積が等しいまま内部エネルギーを下げることができないので，λ_* より大きい λ に対しては，Γ に断熱過程で到達することができない．つまり，λ_* は $((1-\lambda)\Gamma'_0;\lambda\Gamma'_1)$ から Γ へと断熱過程で到達できる上限にある．これより，任意の λ に対して $s_\lambda \equiv \lambda(s_1-s_0)+s_0$ と定義するとき，エントロピーを

$$S(\Gamma)=\sup_\lambda\{s_\lambda N|((1-\lambda)\Gamma_0;\lambda\Gamma_1)\to\Gamma\} \quad (14)$$

と書くことができる．また，以上の議論をさらに一般化することで，断熱過程 $\Sigma_0 \to \Sigma_1$ が実現できる必要十分条件が $S(\Sigma_0)\le S(\Sigma_1)$ であることも分かる．これはエントロピー原理とよばれる．

6. 1997 年 11 月

1997 年 8 月，あるプレプリント（出版前論文）[5] がアーカイブに公開された．そこでは，断熱過程に関する公理系が設定され，エントロピーが (14) として定義された．1997 年 11 月，筆者は，出張の供としてたまたまその論文を鞄に入れた．読み始めると夢中になり，特に (14) の単純な表現に惹かれた．新しい視点でエントロピーを捉えることができるかもしれないと期待して，自分の言葉で理解しようとした．しばらくして，$((1-\lambda)\Gamma_0;\lambda\Gamma_1)$ から可逆過程で状態 Γ に変化できるような λ を求める問題に帰着させた．そのもっとも簡単な場合として，理想気体を例題にして $\lambda=1/2$ に対する Γ を決める問を最初に考えることにした．それが冒頭のパズルに他ならない．

友人たちにこの問題を説明し，筆者もかなりの時間を使って考えた．自分なりの最初の解答をノートにまとめたのは 12 月 7 日である．これは経験温度を明示的に使わないが，無限回の手続きを行う不思議な操作で，しかも本当に可逆になっているかどうか定かでなかった．それでも理想気体のエントロピーの式を再現していたので，その次の展開を模索していた．そんなとき，友人の佐藤勝彦氏（当時，京大院生）が経験温度を用いた解答を見つけた．12 月 17 日に送られてきたファックスの内容を理解したのは，1998 年冒頭だった．それが

*8) Γ が二つの断熱曲線より下側にある場合には，$\lambda_* < 0$ にする．このとき，$((1-\lambda_*)\Gamma'_0;\lambda_*\Gamma'_1)\to\Gamma$ は，$(1-\lambda_*)\Gamma'_0 \to (\Gamma;-\lambda_*\Gamma'_1)$ と読み替える．実際，そのような操作を構成できる．Γ が二つの断熱曲線より上側にある場合には，$\lambda_* > 1$ として同様な読み替えを行う．

*9) クラウジウスの式に対応する．実際，θ と異なる経験温度 $\tilde{\theta}$ をとり，二つの断熱曲線上でその経験温度に対応する状態を $\tilde{\Gamma}_0$, $\tilde{\Gamma}_1$ とすると，$Q_\theta[\Gamma'_0 \xrightarrow{i} \Gamma'_1]$ と $Q_{\tilde{\theta}}[\tilde{\Gamma}_0 \xrightarrow{i} \tilde{\Gamma}_1]$ の比が物質の種類に依らず，θ と $\tilde{\theta}$ だけで決まる（カルノーの定理）ことを示せる．従って，絶対的な温度目盛りとして，$Q_\theta[\Gamma'_0 \xrightarrow{i} \Gamma'_1]$ に比例する量を採用することができる．この絶対温度 T を使うと，(13) より，微小な状態変化に対して $\Delta S=\Delta Q/T$ を得る．ここで，ΔQ は微小変化で得た熱であり，ΔS はそのときのエントロピー変化である．

図 2 で紹介した操作である．それに基づいて書いたノートが，4 節と 5 節の元になっている．また，そのアイデアは，熱力学の教科書[6,7]にも反映されている．自分の人生で (14) とつきあったのはこの 2 カ月だけである．それでも深いつきあいだったので，当時のことは今でも強く記憶に残っている．

最新のプレプリントに反応して自分なりの考えを展開するのは普段の研究の営みと似ている．それゆえに，この記事には専門論文の香りも漂っているかもしれない．しかし，基本的には熱力学を勉強したばかりの学生でも理解できる内容だと思う．もし，完全に理解するのが難しかったとしても，冒頭の例題の面白さとそこから論理と思考を深めていく様を感じとってもらえれば嬉しい．

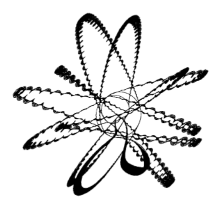
参考文献

1) 佐々真一,「熱力学の基礎概念〜エントロピーをめぐって〜」, 数理科学特集/物理的思考法のすすめ 2008 年 7 月号（サイエンス社）.
2) E. フェルミ，『熱力学』，（三省堂，1973）.
3) H.B. キャレン，『熱力学および統計物理入門』，（吉岡書店，1998）.
4) 清水明，『熱力学の基礎』，（東京大学出版会，2007）.
5) E.H. Lieb and J. Yngvason, The physics and mathematics of the second law of thermodynamics, *Phys. Rep.* **310**, 1–96 (1999); arXiv:cond-mat/9708200.
6) 佐々真一，『熱力学入門』，（共立出版，2000）.
7) 田崎晴明，『熱力学—現代的な視点から—』（培風館，2000）.

（ささ・しんいち，東京大学大学院総合文化研究科）

鏡像法

数え上げ問題からモノポールまで



押川　正毅

1. 鏡像法とは

物理学や数学の様々な場面で，**境界条件**を満たす方程式の解を求める問題が生じる．一般には，これは境界条件のない（無限空間の）問題に比べ一段と困難であるが，発見的に解を求めることができる場合がある．その典型的なケースが，**鏡像法**と呼ばれるものである．まず，基本的な例題として，学部の電磁気学で学ぶ電荷の問題を復習しよう．

> 無限に広い導体板があり，その上に点電荷 Q があるとする．導体板が接地されている場合，電位分布を求めよ．

導体板の上面を xy 平面（$z=0$），点電荷の位置を $\vec{r}_0=(0,0,a)$ とおくと，数学的には，Maxwell 方程式より電位を $\phi(\vec{r})$ として $-\epsilon_0\vec{\nabla}^2\phi(\vec{r})=\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ を境界条件 $\phi(x,y,0)=0$ の下で解くことになる．ただし，導体板の外の空間は真空であり，その誘電率が ϵ_0 であるとした．微分方程式の一般論から解こうとすると大変そうだが，この問題は以下のように考えることができる．

そもそも，もとの問題では電位は導体板の上側（$z>0$ の領域）でのみ考えるが，いったん導体板の存在を忘れ，全空間（$-\infty<z<\infty$）に拡張して考える．ここで，点電荷 Q により生じる電位のみを考えると，$\phi_+(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$ となる．これはもちろん Maxwell 方程式の解であるが，境界条件は満たさない．そこで，仮に点電荷の xy 面について対称な位置 $\vec{r}_0^{\,*}=(0,0,-a)$ に，電荷 $-Q$ があったとする．このときの電位は，重ね合わせにより

$$\phi_{+-}(\vec{r})=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0^{\,*}|}\right). \quad (1)$$

これは Maxwell 方程式の解であり，また対称性により自動的に境界条件を満たす．もちろん，実際には $\vec{r}_0^{\,*}$ に電荷 $-Q$ があるわけではないが，もとの問題の電位の定義域を拡張した領域に仮想的に電荷を導入することは自由である．このように，境界について対称的な位置に仮想的な源を導入して境界条件を満たす解を得る方法を鏡像法と呼ぶ．ややこしい計算が多い電磁気学の中で，鏡像法による解法の爽快さが印象に残ったのは筆者だけだろうか．

2. 最短経路の数え上げ

話が飛ぶようだが，ここで**最短経路の数え上げ**問題を考えよう．例えば

> 一辺の長さが1で $M\times N$ の正方格子を考える．左下から右上まで辺をたどって最短距離 $M+N$ で結ぶ経路は何通りあるか．

は，高校数学の基本的な問題であり，もちろん答は ${}_{M+N}\mathrm{C}_M=(M+N)!/(M!N!)$ である．では，類似の問題として，以下はどうだろうか？

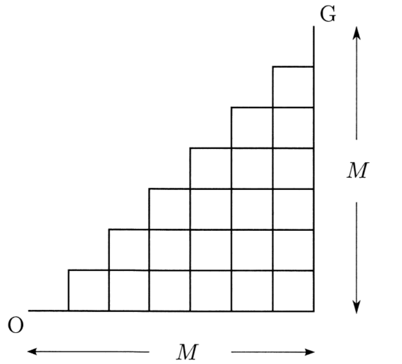


図 1　$M\times M$ の正方格子を斜めに切った半分に相当する階段状の格子．左下の原点 O から右上 G まで辺をたどって結ぶ経路の最短距離は $2M$ である．

図 1 のような，階段状の正方格子がある．左下から右上まで辺をたどって最短距離 $2M$ で結ぶ経路は何通りあるか．

一見簡単な問題であり，もちろん M が小さい場合に経路の数を具体的に求めることはすぐにできる．しかし，任意の M についての一般形を求めることはそんなに簡単ではないように見える．少なくとも，大学教養時代の筆者はしばらく懸命に考えたがわからなかった．当時，この問題を友人*1)が鮮やかに解いたことが印象に残っているので，以下それを紹介する．

まず，最短距離で点 (m,n) に到達する経路の数を $N(m,n)$ とすると，これは以下の漸化式を満たす．

$$N(m,n)=N(m-1,n)+N(m,n-1). \quad (2)$$

ただし，格子が存在しない領域では $N=0$ である．ここで，最初の階段状図形を拡張して，図 2 のような格子を考える．このとき，原点 O からスタートして最短距離で点 (m,n) に到達する経路の数は $N_+(m,n)={}_{m+n}\mathrm{C}_m$ である．もちろん，このままでは階段状の格子についての答になっていない．ここで，点 $\mathrm{P}=(-1,1)$ からスタートして最短距離で点 (m,n) に到達できる経路の数を考えよう．これは，同様に $N_-(m,n)={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}$

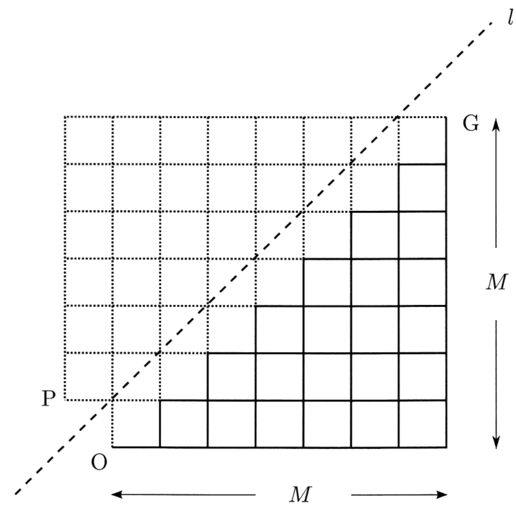


図 2　図 1 の階段状図形に，点線の部分を拡張して考える．

である．ところが，直線 l 上の格子点 $(m-1,m)$ では対称性により $N_+=N_-$ である．そこで，

$$N_{+-}(m,n)\equiv N_+(m,n)-N_-(m,n) \quad (3)$$

を定義すると，これは直線 l 上ではゼロになり，階段状の格子の上で漸化式を満たし最短経路数の解を与えている．元の問題に戻ると，左下角から右上角までの最短経路の数は

$${}_{2M}\mathrm{C}_M-{}_{2M}\mathrm{C}_{M+1}=\frac{(2M)!}{(M+1)!M!} \quad (4)$$

である．なお，この数は **Catalan 数**と呼ばれ，他の様々な数学上の問題に登場する．それらの問題の解法（Catalan 数の導出法）も，上で述べたものを含め多数が知られているようである．

3. 拡散方程式と Poisson 和公式

前節の問題は，最初の静電場の問題と一見何の関係もなさそうだったが，解法を見れば鏡像法という点での共通性があることがわかるだろう．さらに，前節の最短経路の数え上げの問題は，以下のように物理学における**ランダムウォーク**の問題として解釈することもできる．

無限に長い 1 次元格子上に一つの粒子があるとする．この粒子は初期状態で原点にあり，各ステップで左右のどちらか ±1 にそれぞれ確率 1/2 で移

*1)　辻雄氏（現・東京大学大学院数理科学研究科）．

動することとする．この粒子の軌跡は，正方格子を 45 度回転したものの上の最短経路に対応し，T ステップ後に粒子が位置 x に存在する確率は

$$P(T,x)=\frac{{}_{T}\mathrm{C}_{(T+x)/2}}{2^T} \tag{5}$$

である．前節で考えた階段状の格子は，位置 -1 に境界が存在し，そこに粒子が到達すると境界に吸収されてしまうという状況に対応する．

さて，ランダムウォークは連続極限（格子間隔および時間刻みが小さい極限）では**拡散方程式**で記述されることが知られている．従って，拡散方程式についても鏡像法を適用することができる．もちろん，ランダムウォークから出発しなくても，拡散方程式に対して直接鏡像法を適用することができる．例えば，次のような問題を考えよう．

> 確率密度関数 $\rho(x,t)$ が 1 次元の拡散方程式
>
> $$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)=D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x,t) \tag{6}$$
>
> に従う粒子がある．時刻 $t=0$ で粒子は $x=0$ にあった（$\rho(x,0)=\delta(x)$）．$x=-l/2, l/2$ に粒子を反射する境界が存在する場合，$\rho(x,t)$ を求めよ．

まず，境界がない（無限系）の場合には，$t=0, x=0$ における粒子源により解は

$$\rho(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \tag{7}$$

で与えられる．

反射境界では，粒子の流れがゼロであることが要請され，それより ρ に関して **Neumann 型の境界条件** $\partial_x\rho=0$ が導かれる．これは，初期条件の境界についての鏡像として正の粒子源を置くことで満たすことができる（前節で議論した吸収境界の場合には，負の粒子源を置いた）．従って，$x=0$ の粒子源の鏡像として $x=\pm l$ に正の粒子源を置くことになる．しかし，今のように境界が 2 つある場合，それだけでは境界条件を満たすことができず，図 3 のように，鏡像の鏡像，さらにその鏡像…も導入する必要がある．従って，解は無限個の鏡像からの寄与を含めて

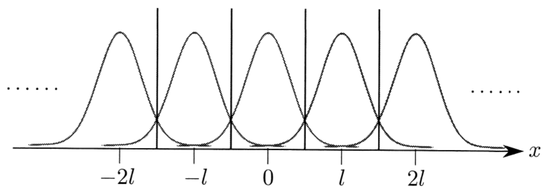


図 3　鏡像法による拡散問題の解．境界がない場合の拡散方程式の解（ガウス関数）と，その鏡像の重ね合わせによって与えられる．$x=\pm l/2$ に 2 つの反射境界が存在するため，2 枚の合わせ鏡がある場合と同様に無限個の鏡像が出現する．

$$\rho(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-kl)^2}{4Dt}\right] \tag{8}$$

となる．t が小さい場合には遠方の鏡像からの寄与は小さいので，上記の無限和は速やかに収束する．しかし，t が大きくなると，遠方の鏡像からの寄与が大きく，収束は遅い．

t が大きいときの解の漸近的な振舞いを知るには，上記の鏡像法とは異なる解法が便利である．境界条件は，**Fourier 級数**による標準的な解法でも扱うことができる．$x=\pm l/2$ における Neumann 境界条件を満たす解は

$$\rho(x,t)=\frac{1}{\sqrt{l}}a_0(t)+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n(t)\cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)+b_n(t)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{l}\right)\right\} \tag{9}$$

と展開することができる．対称性から $b_n(t)=0$ であり，初期条件から $a_n(t)$ を求め拡散方程式を解くと，結局解は

$$\rho=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)e^{-4D\pi^2n^2t/l^2} \tag{10}$$

となる．これも無限級数であるが，t が大きいときには n の大きな項は小さいので収束は速い．特に，$t\to\infty$ で解が x によらない一定値に収束することは反射壁に囲まれた空間での拡散であることから物理的に期待されるが，これが数式上も明らかな形になっている．一方，t が小さいときには n が大きい高調波の寄与も小さくなく，級数の収束は遅い．

さて，(8) 式と (10) 式は同じ問題を別の方法で解いた結果なので，この 2 つの一見全く別の無限級数は厳密に等しいことになる！ 鏡像法の応用から，教養当時の筆者はこのことを「発見」して大変感動したのだが，もちろんこれは古くから知られている結果である．Fourier により展開された『熱の解析的理論』[2] を背景に，上述の等式は Poisson によって 1827 年に最初に導出された[1]．これはいわゆる **Poisson の和公式**の特殊な場合であるとともに，Poisson とほぼ同時期に，Jacobi が複素解析に基づき導いた[3] **楕円テータ関数の虚数変換公式**にも等価である．このように，物理的な考察から数学的に非自明な等式が導かれることは興味深い．Poisson らの時代の後，数学者の興味は全体的に物理学の問題から離れていったようであるが，近年，物理的な考察による結果が再び数学を先導することもしばしばあるようであり[4]，物理学者としては嬉しく感じる．

4. 場の理論における鏡像法

前節までに述べた学生時代の経験から，鏡像法は個人的に印象深く気に入っている方法だったのだが，場の理論の研究でも活用できる機会[5]があった．ここでは，藤本・Eggert により議論された物性物理・統計力学の問題を例に，場の理論における鏡像法の一例を紹介する．**1 次元 $S = 1/2$ XXZ 反強磁性鎖**

$$\mathcal{H} = J \sum_j \left(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + \Delta S_j^z S_{j+1}^z \right) \tag{11}$$

を考える．これは現実のいくつかの磁性体の良いモデルであり，それらの多くは等方的な XXX 鎖 ($\Delta = 1$) に対応するが，ここでは一般の異方性 Δ を考える．

この 1 次元 $S = 1/2$ XXZ 鎖を含む，極めて広い範囲の 1 次元量子多体系は**朝永・Luttinger (TL) 液体**として記述されることが知られている．その導出および詳細は文献 6) に譲るが，TL 液体

とはラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 \tag{12}$$

により定義される，$1+1$ 次元時空における相対論的な**自由ボソン場**の量子論に他ならない．ただし，このとき理論中で「光速」に相当するものは，その系で素励起が伝播する速度（スピン鎖の場合はスピン波速度）で，電磁波である光の物理的な速さよりも小さい．

以下，簡単のため「光速」（スピン波速度）が 1 となるような単位系を取る．この場の理論の運動方程式は波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t) = 0 \tag{13}$$

であり，量子論においても演算子 ϕ に関する方程式として成立する．その一般解は，

$$\phi(x,t) = \phi_R(x-t) + \phi_L(x+t) \tag{14}$$

である．すなわち，ϕ は右向き進行波 ϕ_R と左向き進行波 ϕ_L の重ね合わせで与えられる．

さて，場 ϕ は，物理的には電荷密度波の位相を表すと解釈できる．従って，系の内部で定義できるすべての観測量は ϕ に関して周期性を持つ．そこで，ϕ が半径 R の円周上で定義されると考えて

$$\phi \sim \phi + 2\pi R \tag{15}$$

と同一視して良い．ここで R は**コンパクト化半径**と呼ばれる量で，文献によっては **Luttinger パラメータ**と呼ばれるものに対応する．このような同一視の下で許される基本的な物理量として，**頂点演算子**

$$V_n = e^{in\phi/R} \tag{16}$$

がある．簡単のため単一の指数関数を考えるが，ラグランジアン等に含む場合は例えば実部の $\cos(n\phi/R)$ を考える．コンパクト化 (15) より，n は整数に量子化される．なお，$S=1/2$ XXZ 鎖については **Bethe 仮設による厳密解**と場の理論の比較により，コンパクト化半径 R は

$$2\pi R^2 = 1 - \frac{1}{\pi}\cos^{-1}\Delta \tag{17}$$

と異方性 Δ の関数として厳密に求められている．ただし，$-1 < \Delta \le 1$ である．$\Delta < -1$ または $\Delta > 1$ の場合には，系はゼロでない励起ギャップを持ち，TL 流体ではなくなる．特に，等方的な XXX 反強磁性鎖（$\Delta = 1$）では $R = 1/\sqrt{2\pi}$, Δ を小さくすると R も小さくなり XY 鎖（$\Delta = 0$）では $R = 1/\sqrt{4\pi}$, $\Delta \to -1$ の極限では $R \to 0$ となる．

無限に大きい系では，頂点演算子の相関関数は右向きと左向きの成分の寄与の積として求められる．

$$\begin{aligned}
&\langle e^{in\phi(\vec{r})/R} e^{-in\phi(\vec{0})/R} \rangle \\
&\propto \frac{1}{(x+i\tau)^{n^2/(4\pi R^2)}} \frac{1}{(x-i\tau)^{n^2/(4\pi R^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+\tau^2}^{\,n^2/(2\pi R^2)}}.
\end{aligned} \tag{18}$$

ただし，虚時間 $\tau = it$ を導入した．なお，無限に大きい系では，一つの頂点演算子のみの期待値はゼロである．これは，右向きと左向きの成分がそれぞれ完全に独立であることの反映である．

さて，相関関数から，$e^{in\phi/R}$ の**スケール次元**は $d_n = n^2/(4\pi R^2)$ であることがわかる．$1+1$ 次元系では，自由ボソン場の理論に頂点演算子が摂動として加わったとき，そのスケール次元が 2 未満であればくりこみ群の意味で relevant であり，摂動の効果は低エネルギーになればなるほど大きくなる．このとき，最終的には系は TL 液体ではなくなる（多くの場合，ギャップを持つ）．一方，摂動演算子のスケール次元が 2 より大きい場合はくりこみ群の意味で irrelevant であり，摂動の効果は低エネルギーで漸近的に消える．

一般に，与えられた物理系が完全に自由ボソン場で記述されるということはなく，実際には様々な摂動が加わっている．これらの摂動がすべて irrelevant である場合，低エネルギー極限では摂動の効果が無視でき，漸近的に自由ボソン場による記述が厳密になる．

$S=1$ XXZ 鎖では，頂点演算子 (16) のうち，最低次の $n=1$ は空間的な振動を伴うため平均的には無視できることがわかっている．従って，最もスケール次元の小さい頂点演算子は $n=2$ に対応するものである．$n=2$ の頂点演算子のスケール次元

は等方的な $\Delta=1$ でちょうど $d_n=2$ で marginal (relevant と irrelevant の境界)，$-1<\Delta<1$ では $d_n>2$ で irrelevant である．このため，低エネルギー極限で自由ボソン場による記述（TL 液体）が厳密に成立する．$\Delta>1$ の場合には $d_n<2$ で摂動が relevant であり低エネルギー極限で影響が増大する．その結果，系は励起ギャップを持つ．これが，前述のように $\Delta>1$ で系が TL 液体でなくなってしまう理由である．

$-1<\Delta\leq 1$ の場合を考えよう．このとき，すべての摂動は irrelevant なので低エネルギー極限で系は TL 液体で記述される．一方，現実のスピン鎖はしばしば不純物等によって，端を持つ有限長の鎖の集まりに分断される．スピン鎖が端を持つ場合，TL 液体には **Dirichlet 境界条件**

$$\phi=0 \tag{19}$$

が課される．スピン鎖が端を持つことによって，様々な物理量に異常が現れることが知られている．藤本・Eggert は，端の存在により帯磁率に現れる異常が系全体（バルク）にもともと存在した irrelevant な摂動 V_2 に起因することを指摘した．これは，次のように理解することができる．摂動を含めたラグランジアン密度

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\lambda V_2 \tag{20}$$

となる．分配関数 Z から自由エネルギー $F=-k_BT\log Z$ を λ の 1 次まで求めると，

$$F\sim F_0+\lambda\int d\tau\int dx\,\langle V_2\rangle \tag{21}$$

となる．右辺は頂点関数一つの期待値で与えられているが，境界のない無限系ではこれはゼロになる．しかし，系が端を持つ場合，その付近では必ずしもゼロにならないのである．実際，無限系では ϕ が特定の値に固定されないので頂点関数の期待値はゼロしか取り得ないが，端付近では境界条件により $\phi=0$ と固定されているのでその付近では期待値が有限になる．

系が $x>0$ の半無限空間で定義されており，$x=0$ で Dirichlet 境界条件が課されているとしよう．ϕ_R は z の解析関数なので，これを $x<0$ の領域に解析接続することができる．境界 $x=0$ 上で $\phi=\phi_R+\phi_L=0$ が成立するので，

$$\phi_L(x,\tau)=-\phi_R(-x,\tau) \tag{22}$$

とすれば境界条件を満たす．従って，

$$V_2=e^{2i\phi_R(x,\tau)/R}e^{-2i\phi_R(-x,\tau)/R} \tag{23}$$

と書くことができ，V_2 の 1 点関数は境界の存在により 2 点関数となる！ これは，V_2 に含まれる左向き成分 ϕ_L について鏡像法を適用したことになる（なお，原論文[7]では境界のある共形場理論の一般論を用いており鏡像法は使っていないが，自由ボソン場の境界条件については鏡像法を用いるのが簡便である）．これより，境界付近での 1 点関数は

$$\langle V_2(x,\tau)\rangle\propto\frac{1}{x^{1/(\pi R^2)}} \tag{24}$$

となる．従って，端付近での V_2 のスケール次元は $1/(\pi R^2)$ と見なすことができる．自由エネルギーの計算にあたっては，x と τ で積分して温度 T を掛けるため，時間と長さのスケール次元が -1，温度のスケール次元が 1 であることから

$$F\sim F_0+\mathrm{const.}T^{1/(\pi R^2)-1} \tag{25}$$

となる．これより，Sommerfeld 比（比熱 C と温度 T の比）は

$$\frac{C}{T}\sim C_0+\mathrm{const.}T^{1/(\pi R^2)-3} \tag{26}$$

となる．特に，$1/2<\Delta\leq 1$ の場合 $2\leq 1/(\pi R^2)<3$ となるので，低温で端の寄与による Sommerfeld 比は発散する．一方，TL 流体のバルクの比熱は低温で温度 T に比例するので，Sommerfeld 比は定数になる．従って，$1/2<\Delta\leq 1$ の場合，低温では端の効果が支配的となる．なお，実験的に最も興味深い $\Delta=1$ の場合，上記のスケーリングの粗い議論からは比熱が低温で定数（Sommerfeld 比は $1/T$ に比例）であるが，より正確な解析によれば $\log T$ の関数である対数補正が現れる．磁場の下での自由エネルギーを同様に解析することにより，帯磁率にも同様の異常が現れることが示されている[7]．実験的に特に興味のある $\Delta=1$ の場合には，実験データから帯磁率における端の効果を確認できる[8]．

5. おわりに

以上，様々な問題に鏡像法が応用できることを見てきた．物理学の醍醐味の一つとも言える特徴的な方法として，思考実験が挙げられるだろう．仮想的な鏡像を導入することにより解を得るやり方は，その一環とも言える．例えば静電場の問題について，鏡像法で導入した鏡像電荷はもちろんあくまで仮想的なものであって現実にそこに電荷があるわけではない．しかし，導体の上側の電磁場のみを観測する立場からは，鏡像電荷が現実に存在するのか，導体板によって境界条件が与えられているのか区別することはできない，ということも注意しておこう．これに関連して，最近，トポロジカル絶縁体の表面付近に電荷を配置した場合，磁気モノポールが電荷の鏡像として「出現する」という興味深い指摘[9]もなされている．先ほど述べたように，磁気モノポールが実際に生成するというわけではないが，トポロジカル絶縁体の外側ではあたかも磁気モノポールがあるかのように「見える」のである．

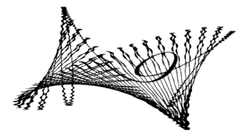
本記事の執筆に有用な議論をしていただいた方々，特に辻雄，吉川雅英，Ian Affleck の諸氏に感謝します．

参考文献

1) S.D. Poisson, *Mém. Acad. Sci. Inst. France* **6**, 571 (1827).
2) J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, Père et Fils, Paris (1822).
3) C.G.J. Jacobi, *J. reine angew. Math.* **3**, 403 (1828).
4) 例えば，数理科学 2007 年 8 月号 特集：「数学における場の量子論」(サイエンス社).
5) M. Oshikawa and I. Affleck, *Nucl. Phys. B* **495**, 533 (1997).
6) 教科書として例えば，川上則雄，梁成吉『共形場理論と 1 次元量子系』(岩波書店，1997).
7) S. Fujimoto and S. Eggert, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 037206 (2004).
8) J. Sirker, N. Laflorencie, S. Fujimoto, S. Eggert, and I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 137205 (2007).
9) X. Qi, R. Li, J. Zang, and S.-C. Zhang, *Science* **323**, 1184 (2009).

(おしかわ・まさき，東京大学物性研究所)

量子力学
巨人たちの視点とそこに生まれた発想



仲　滋文

■　1. 自然はそれを強いる　■

「国王陛下，王族方，ならびにご列席の皆様

光線の本性についての疑問は，物理学の最も古い問題の一つであります．古代の哲学者によって，光線についての根本的に異なる二つの概念が，遠回しではありますがすでに用意されていることがわかります．しかし，この二つの概念が明瞭なはっきりした形をとるのは，物理学の基礎がかたまったとき，すなわち天才ニュートンがあらわれたときのことです．一方の理論によれば，光線は光を放出する物質から空間に投げ出された微粒子からできていることになります．他の理論は，光はある種の波動であると主張します．初期の理論では，どちらの理論も同じように可能でした．それは，どちらの理論も光線が乱されない限り直進するという最も簡単な法則を説明できたからです．」

少々長い引用となったが，1929 年のド・ブロイ（仏）ノーベル賞受賞講演に先立って話された，スウェーデン王立科学アカデミー・ノーベル物理学委員会委員長ウーセン教授による業績紹介の冒頭の件である[1)]．以下，ド・ブロイによって提案された，粒子と波という“相反する” 2 つの概念を同じ対象の異なる側面として見る考え方が，いかに衝撃的な発想であったかが語られる．量子力学はそれが創られた出だしから，時代の常識から見れば意表をついた発想の積み重ねだったのである．ただし，自然が対象である以上，面白いことが“科学的真実”とは限らない．時代の変革期に，科学的真実がしばしば時代を超えた“面白い発想”を強いたのであり，ド・ブロイのような少数の天才がそれに気付いたのである．

■　2. 波か粒子か　■

ド・ブロイは大学では歴史学を先行していたが，兄のモーリスがランジュバンと共に編纂した 1911 年のソルベー会議報告書を読んだことを機に物理学に転向し，興りつつある量子論に目を向けた．研究のスタートは，モーリスたちとの X 線の実験・理論であったが，そこに必然的に現れる X 線（光）の波と粒子の**二重性**の問題を重視し，1923 年にこれを自然の本質と考える 3 本の論文を発表して，1924 年にこれらの結果を学位論文としてまとめた．

ド・ブロイは，当時既にゆるぎない評価を得ていたアインシュタインの相対性理論と，評価の分かれていた光量子説を前提とした．後者によれば，振動数 ν の光は，h をプランク定数としてエネルギー $\epsilon = h\nu$ の粒子としての性質を持つ．一方，相対性理論によれば，粒子の静止系（図 1 の Σ' 系）におけるエネルギー ϵ_0 は，粒子の静止質量を m_0，光速を c として，$\epsilon_0 = m_0 c^2$ と表せる．ド・ブロイは，この粒子のエネルギーもまた光子のように“対応する”波の振動数 ν_0 で表せると考え，

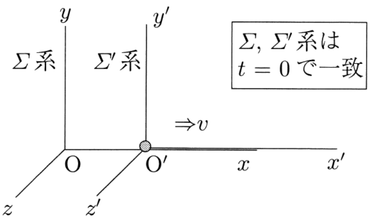


図 1　慣性座標系 Σ と，これに対し等速度 v で x 軸正方向に運動する粒子の静止系 Σ' (原点 O' を粒子位置とする).

$$m_0c^2 = h\nu_0 \tag{1}$$

とおいた．相対論によれば，この粒子の Σ 系(図 1)でのエネルギー E と運動量 p は,

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad p = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{2}$$

であり，粒子の速さは $v = c/\sqrt{1+\left(\frac{m_0c}{p}\right)^2}$ となる．とくに $v = c$ の光子は静止質量が 0 で，(1) は $m_0 \neq 0$ の粒子に光子と同じ量子条件を適応しようとするもので，**常識**を無視した飛躍に見える．

さて，Σ 系の座標 (t, x, y, z) と Σ' 系の座標 (t', x', y', z') を結びつけるローレンツ変換が

$$t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tag{3}$$

および $y' = y, z' = z$ であることに注意すると,

$$\sin(2\pi\nu_0t') = \sin\left\{2\pi\nu\left(t-\frac{x}{V}\right)\right\} \tag{4}$$

のような書き換えにより，粒子に結びついた波の Σ 系での振動数 ν と位相速度 V は,

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad V = \frac{c^2}{v} = \frac{E}{p} \tag{5}$$

になることがわかる．また，(1), (5) より，Σ 系での粒子のエネルギーは波の言葉で

$$E = h\nu \tag{6}$$

と表される．V は光速より大きく粒子の速度 v には対応しないが，$\lambda = \frac{V}{\nu}$ により粒子の波長を導入すると

$$p = \frac{Ev}{c^2} = \frac{E}{V} = \frac{h}{\lambda} \tag{7}$$

が導かれる．(6), (7) が，ド・ブローイの与えた粒子と波を特徴づける変数の対応関係である．このとき粒子の速度は，波の**群速度**

$$v = \frac{\partial\nu}{\partial\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\partial E}{\partial p} \tag{8}$$

に対応する．(8) は粒子の正準運動方程式そのものであり，非常識な飛躍と思える発想から，常識に合致する結果が導かれたことになる．

ド・ブローイは，ν を粒子の内的な振動を粒子の運動に沿って伝える“架空波”の振動数と考えた*1)．一度 (6), (7) を認めてしまえば，閉じた軌跡 C に沿って運動する粒子は，対応する波が定常波のときに安定状態と考えて

$$\oint_C \frac{dl}{\lambda} = \frac{1}{h}\oint_C p\,dl = \text{整数} \tag{9}$$

とおけば，前期量子論の**量子化条件**も自然に導かれる．光量子を手がかりに粒子を波に対応させたド・ブローイの面白い発想は，デヴィスンとガーマーによりその正当性が実験的に確められ，シュレディンガーに引き継がれる波動力学の第一歩となったのである．

3. 非可換の世界

ド・ブローイの物質波の発想は，シュレディンガー（1926）により波動力学として大成され，現在の量子力学の原型が作られた．歴史的にはシュレディンガーより一年早く，量子力学のもう一つの基礎である行列力学が，ハイゼンベルク（1925）により発見されている．ハイゼンベルクは，原子

*1) (3) から，$x' = 0$ にある粒子の時間は $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ と遅れ，$\nu_0(\propto 1/\Delta t')$ は Σ 系の時間で

$$\nu_1 = \nu_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \nu\left\{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}$$

と書き換えられる．ド・ブローイは ν_1 を内的な振動の周期と考え，$x = vt$ における架空波との位相の一致

$$\sin\left\{2\pi\nu\left(t-\frac{x}{V}\right)\right\}\Big|_{x=vt} = \sin(\nu_1 t)$$

を，波と粒子の二重性を理解する手掛かりと考えた．

が光を放出，あるいは吸収する分散理論の探求で，周期運動を行う n 番目の量子状態にある電子の（簡単のため1次元）座標と運動量をフーリエ級数

$$q_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_n(m) \mathrm{e}^{2\pi i m \nu_n t}, \tag{10}$$

$$p_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_n(m) \mathrm{e}^{2\pi i m \nu_n t} \tag{11}$$

で表し，ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件 $nh = \oint p dq$ を $h = \frac{\partial}{\partial n}\int_0^{\nu_n^{-1}} p\dot{q} dt$ と書いた上で

$$\begin{aligned}\frac{h}{2\pi i} &= \sum_m m \frac{\partial}{\partial n}\{p_n(m)^* q_n(m)\} \\ &= \sum_k \{p(n,k)q(k,n) - q(n,k)p(k,n)\}\end{aligned} \tag{12}$$

を導いた*2)．(12) の右辺は，行列 $\boldsymbol{p} = \{p(n,m)\}$ と $\boldsymbol{q} = \{q(n,m)\}$ の順序を変えた積の差（**交換関係**）の対角成分であり，ここに行列力学の第一歩が踏み出された[2]．しかし，ハイゼンベルクの論文では $p \to m\dot{q}$ と書かれており，(12) が正準変数 (p,q) の交換関係であることも，明確には意識されていない．

ハイゼンベルクの試みの本質が正準変数の交換関係にあることは，ハイゼンベルクの上司であるボルン（独）と彗星のごとく現れたディラック（英）により看破された．両者は，ハイゼンベルクの理論を発展させる過程で物理の世界に非可換な力学変数の世界を導入して行列力学を完成していくが，その要となる発想は全く違っていた．

ボルンは行列に関する十分な知識があり，数学的な形式の整備も得意であった．さて (10) は，ハイゼンベルク理論ではエネルギー E_n, E_m の状態間で定義される $q(n,m)\mathrm{e}^{2\pi i\nu(n,m)t}$ を成分とする行列 $\boldsymbol{q} = \{q(n,m)\}$ に対応した（簡単のため，表記は $\mathrm{e}^{2\pi i\nu(n,m)t}$ を省略した）．ここで，対角行列

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & \cdots \\ 0 & E_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{13}$$

を定義し，$\boldsymbol{Wq} - \boldsymbol{qW} = \{(E_n - E_m)q(n,m)\}$ および**リッツの結合法則** $\nu(n,m) = \frac{1}{h}(E_n - E_m)$ に注意すると

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \frac{2\pi i}{h}(\boldsymbol{Wq} - \boldsymbol{qW}) \tag{14}$$

が得られ，同じ形の方程式が行列 $\boldsymbol{p}$ に対しても導かれる．ここで交換関係の記号 $[A,B] \equiv AB - BA$，また定数 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ を使うなら，$\frac{d}{dt}\boldsymbol{q} = \frac{i}{\hbar}[\boldsymbol{W},\boldsymbol{q}]$ および $\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \frac{i}{\hbar}[\boldsymbol{W},\boldsymbol{p}]$ である．また，(12) を非対角要素まで拡張し，ある時刻に $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = -i\hbar\boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{I}$：単位行列）と置くと，$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}] = -i\hbar[\boldsymbol{W},\boldsymbol{I}] = 0$ から，任意の時刻に同じ交換関係が成立する．最後に，$\boldsymbol{Q} = S\boldsymbol{q}S^{-1}, \boldsymbol{P} = S\boldsymbol{p}S^{-1}, \boldsymbol{H} = S\boldsymbol{W}S^{-1}$ により一般の基底に移ると，

$$[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}] = -i\hbar\boldsymbol{I}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{Q} = \frac{i}{\hbar}[\boldsymbol{H},\boldsymbol{Q}], \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = \frac{i}{\hbar}[\boldsymbol{H},\boldsymbol{Q}] \tag{17}$$

が得られる．以上が，ボルン–ヨルダン，ボルン–ヨルダン–ハイゼンベルクと繋がる行列力学の形である．ボルンたちの発想は正攻法ではあるが，(16)，(17) を古典力学の**正準運動方程式** $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ に対応させせようと行列の微分演算を前面に出し，難解な展開となった．

同じ頃，ディラックは当初ハイゼンベルクの論文に興味を持っていなかったものの，あるとき議論の本質が (12) の正準変数の非可換性にあると確信し，その意味を探究していた．研究の疲れを癒すために夕方に日課として行っていた田園地帯の散歩の途上，“これは古典力学の**ポアッソン括弧**”だという啓示が突然に降り立った．ポアッソン括弧は，正準変数（簡単のため1自由度）の関数 A, B に対し $\{A,B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}$ で定義され，明らかに $\{p,q\} = -1$ であり，正準運動方程式も $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \{q,H\}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \{p,H\}$ と書ける．これと (15)–(17) を比べて，ディラックが下した結論は[3]，

$$[\hat{A},\hat{B}] = i\hbar\{A,B\} \tag{18}$$

*2) $q_m(n) = q(n,n-m), p_n(m)^* = p(n-m,n)$，および $m\frac{\partial}{\partial n}f(n) = f(n+m) - f(n)$ と置き換えた．

であった．上式の左辺に現れた $\hat{A}, \hat{B}$ は A, B の量子力学的な対応物で，ハイゼンベルクの立場では行列である．(18) は，古典力学と量子力学を繋ぐ橋の役割を果たす関係であり，ハイゼンベルクやボルンが一歩一歩登頂しようとした頂をスタート位置にするような，何とも風通しのよい発想だったのである．

■ 4. アクロバティックな発想 ■

量子力学の建設から 6 年後，ディラックは波動関数の位相に関する徹底した分析から，**磁気単極子**の存在と電荷の量子化という，驚くべき結論を引き出した．その発想は，次のようなものである．

量子力学では，系の状態は波動関数 $\psi = Re^{i\theta}$ により記述されるが，その位相因子 θ は観測量である確率密度 $\psi^*\psi = R^2$ には現れない．従って，$|\psi|^2$ のみを考える場合には θ はかなり広い範囲の関数が可能で，考えている位置 (t, x, y, z) だけではなく，その位置を移動するときの経路に依存する因子 β が付加されていても影響はない．このような関数は “**可積分**” ではなく，例えば

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y} \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x} \tag{19}$$

であり，ある点から閉路を一周して同一点に戻っても，一般には元の値には戻らない．もし，このような β が状態ごとに異なれば，異なる状態間の干渉項 $\phi^*\psi$ や遷移の確率密度 $\int dV \phi^*\psi$ が一意に決まらなくなってしまう．これを避けるためには，β はすべての状態に共通であるとすれば良い．ディラックは，このような位相 β は力学系に自身に付随したものであると考えた．

例えば，自由粒子の（時間に依存しない）シュレディンガー方程式 $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$ を考える．波動関数から β を分離して $\psi = e^{i\beta}\psi_0$ と書き，$\boldsymbol{\nabla}\left(e^{i\beta}\psi_0\right) = e^{i\beta}(\boldsymbol{\nabla} + i\boldsymbol{\nabla}\beta)\psi_0$ に注意すると，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{ie}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi_0 = E\psi_0\ , \tag{20}$$

ただし

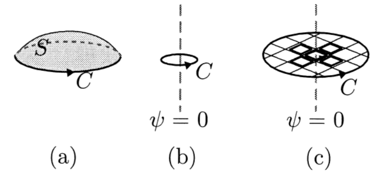


図 2 (a) 閉路 C を縁とする曲面 S，(b) $\psi = 0$ の近傍を回る閉路 C，(c) 小さな閉路の集まりとしての閉路 C．

$$\boldsymbol{A} = -\frac{\hbar c}{e}\nabla\beta = -\frac{\hbar c}{e}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}, \frac{\partial\beta}{\partial y}, \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) \tag{21}$$

が得られる．(20) は，e を素電荷，c を光速とすれば，磁場中にある電子のシュレディンガー方程式であり，また β が可積分ではないとしているので，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \neq 0$ である．そこで，β は可積分ではないが，$\boldsymbol{A}$ は通常のベクトル・ポテンシャルとなって磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を決定すると考える．

さて，この磁束密度を閉路 C を縁とする曲面 S 上で積分したものは，ストークスの定理により

$$\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B} = \int_C d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{\hbar c}{e}\delta\beta \tag{22}$$

となる．ここで $\delta\beta$ は，閉路 C に沿って一周した際の位相 β の変化分で，波動関数の連続性により，C の変形に伴い連続的に変化する．例外は，C が波動関数の 0 点に近づくときであり，そこでは位相自体が不定のため，β の変化は $\delta\beta + 2\pi n$ (n : 整数) であってよい．このような 0 点は $\mathrm{Re}\,\psi = \mathrm{Im}\,\psi = 0$ から決まり，これを満たす点は 1 次元の曲線（仮に 0 点曲線とする）を形成する．整数 n は，それぞれの 0 点曲線に固有の量子数と考えられる．

C が小さくなくても，これを小さな閉路の集まりと考えれば，各閉路の線積分は重なる部分が打ち消し合って外周の線積分となる．従って，このような小さな閉路の一つが 0 点曲線の近傍を周回していれば，外周の積分にも $2\pi n$ の不定性が表れる（図 2 (c)）．そこで図 3 のように，閉路 C を縁とする 2 つの曲面 S と S' で作る閉曲面の中で 0 点曲線が終わっている場合，それぞれの曲面で磁束密度を積分したものの差は，

$$\oint_{S+S'} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{\hbar c}{e} \times 2\pi n \tag{23}$$

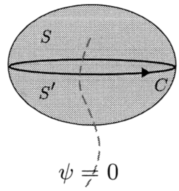


図 3 $\psi=0$ 点の曲線が，閉路 C を縁とする下の曲面 S' を貫いているが，上の曲面 S には達していない場合．

となる．この式は，$n\neq 0$ であれば閉曲面を貫く磁束の総和が 0 とはならず，閉曲面内に単極磁荷があることを意味する*3)．その大きさを g として左辺を $4\pi g$ とおくと，$\frac{eg}{\hbar c}=\frac{n}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ の量子化条件が得られる．

量子化条件の意味するものは，驚くべきことである．磁気単極子の磁荷の強さは量子化されており，これと同時にこのような単極磁荷が宇宙のどこかに一つでもあれば，電荷もまた必然的に量子化されるのである．皮肉屋のパウリをして，アクロバティックと言わしめた思考の帰結である．

5. 巨人の視点[4)]

磁気単極子の論文を著した翌年，ディラックは再び波動関数の位相を異なる観点から調べ，「量子力学におけるラグランジアン」と題した論文を書いた．その 15 年後，プリンストンのナッソウ酒場でヨーロッパから来たジェール教授にファインマンが古典力学の作用と量子力学を直結する方法の有無を訊ねたとき，ジェール教授が示唆した論文である．

ラグランジアンは，力学系（簡単のため 1 自由度）の座標 q とその一階微分 $\dot{q}$ の関数 $L(q.\dot{q})$ で，系の作用（積分）$S[q]=\int_{t_1}^{t_2}dtL(q,\dot{q})$ を定義する．作用は q が時間的に描き出す経路の関数で，q とこれを少しずらした経路 $q+\delta q$ から定義される変分 $\delta S=S[q+\delta q]-S[q]$ は，δq の 1 次で

$$\delta S=[p\delta q]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}dt\delta q\{L\}_{EL}, \qquad (24)$$

ただし $p\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}$，および $\{L\}_{EL}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}$ となる．最小作用の原理は，始点と終点を固定した $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$ の変分に極小条件 $\delta S=0$ を要求し，ラグランジュの運動方程式 $\{L\}_{EL}=0$ を導く*4)．一方，q が元々このような運動方程式を満たす経路であれば，(24) 右辺の積分は 0 となり，

$$p_2=\frac{\partial S}{\partial q_2},\ p_1=-\frac{\partial S}{\partial q_1}\ (q_i=q(t_i)\ \text{etc.}) \qquad (25)$$

が導かれる．運動方程式を満たす経路に対して定義された作用であるが，ディラックの発想はこれを量子力学の遷移振幅の位相に結びつけるのである．

まず，ハイゼンベルク表示の位置の演算子の固有状態 $\hat{q}(t)|q,t\rangle=q|q,t\rangle$ を用意すると，$\hat{q}(t)$ に共役な運動量演算子 $\hat{p}(t)$ は $\langle q,t|\hat{p}(t)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\langle q,t|$ および $\hat{p}(t)|q,t\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial q}|q,t\rangle$ を満たす．そこで，**遷移振幅**を $\langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle=\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}U}$ と書くと，

$$\langle q_2,t_2|\hat{p}(t_2)|q_1,t_1\rangle=\frac{\partial U}{\partial q_2}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}U}, \qquad (26)$$

$$\langle q_2,t_2|\hat{p}(t_1)|q_1,t_1\rangle=-\frac{\partial U}{\partial q_2}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}U} \qquad (27)$$

を得る．次いでディラックは，少々強引な理屈の下に $\langle q_2,t_2|\hat{p}(t_i)|q_1,t_1\rangle=p_i\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}U}$ $(i=1,2)$ とおき，U が (25) と同じ方程式を満たすことから $U\sim S$ と考えて次式を書き下した．

$$\langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle \text{ corresponds to } \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2}dtL}. \qquad (28)$$

さて，ナッソウ酒場の翌日，ジェール教授とファインマンが図書館でディラックの論文を読み進むうちに，上の段落に行き当たった．「ジェール教授，“corresponds to” て何のことだい？」2 人の噛み合わない議論の後，ファインマンはディラックが言いたかったのは “equals to” ではないかと主張した．これは単純ではなく，古典軌道は部分区間も古典軌道であるため，(28) の指数は

*3) どのような形であれ 0 点曲線の終端が閉曲面外にあれば，磁束の総和は 0 になる．この意味で，終端は磁気単極子そのものであり，0 点曲線は無限に細いソレノイドに対応する．

*4) ポテンシャル V，質量 m の非相対論的粒子（1 次元）に対して $L=\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q)$ とおけば，$\{L\}_{EL}=m\ddot{q}+\frac{\partial V}{\partial q}=0$ はニュートンの運動方程式に帰着する．

$$\int_{t_0}^{t_N} dtL = \int_{t_{N-1}}^{t_N} dtL + \cdots + \int_{t_0}^{t_1} dtL \quad (29)$$

を満たして指数関数は各区間の積になるが，対応する遷移振幅は，古典軌道外への積分も含んだ次の結合則を満たす．

$$\langle q_N, t_N | q_0, t_0 \rangle = \int dq_{N-1} \cdots dq_1$$
$$\times \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle. \quad (30)$$

そこでファインマンは，短い時間間隔 ε なら古典軌道は量子論においても支配的であると考え，対応する遷移振幅を $A\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon L(q,\frac{q-q'}{\varepsilon})}$ として，

$$\psi(q, t+\varepsilon) \simeq \int dq' A\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon L(q,\frac{q-q'}{\varepsilon})} \psi(q', t) \quad (31)$$

と書き下した．次いで，$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ の非相対論的な粒子に対し，(31) の右辺を ε で展開した上で q' 積分を実行し，$A = \sqrt{m/2\pi i\hbar\varepsilon}$ とおいてシュレディンガー方程式

$$\psi(q, t+\varepsilon) \simeq \psi(q, t)$$
$$+ \frac{\varepsilon}{i\hbar}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\right\}\psi(q, t) \quad (32)$$

を導いた．ファインマンがジェール教授に，どうだと言わんばかりの顔をしたのは言うまでもない．数日後，ベッドの上でくつろいでいたファインマンに，突如としてこの結果の時空的な意味が閃いた．(30) の結合則で，始点と終点を $t_0 = t_a, t_N = t_b$ に固定して N を大きくすると各区間の時間間隔は小さくなり，その遷移確率を (28) としてよい．この上で $N \to \infty$ の極限をとると，

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int_a^b \mathcal{D}q \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dtL} \quad (33)$$

が得られる．ここで $\int_a^b \mathcal{D}q$ は，各時刻の位置 $q(t_i)$ を変化させて描き出される q_a から q_b に至るすべての経路（図 4）に関わる和（経路積分）を表し，ここにハイゼンベルクともシュレディンガーとも異なる，時空全局を見る巨人の視点から遷移振幅を構成する量子力学の手法が確立された．

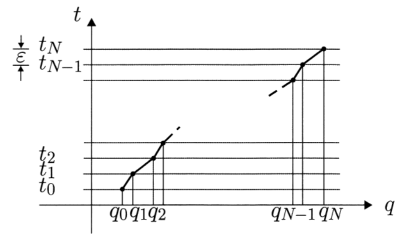


図 4　位置 $q(t_i)$ $(i = 1, \cdots, N-1)$ を連結してできる折れ線の経路 $(q_a = q_0, q_b = q_N)$.

6. 終わりに

ファインマンは，同一の理論に様々な物理的視点や数学的表現を持っていることが，理論物理学者として有用であると言っている[4]．このためには，一見異なるものをごく自然に結び付けて考える発想の柔軟さが必要であり，これが易しいことではないために，人々はそれを目の当たりにしたときに "面白い発想" と驚くのである．面白い発想が，しばしば散歩の道すがらやベッドの上で引き出されるのも，柔軟な発想がくつろいだ状態で引き出され易いからであろう．ド・ブローイ，ハイゼンベルク，ディラック，ファインマンたちは，間違いなくこのような柔軟な発想の下に思わぬものを結び付けて，自然の真理を明らかにしたのである．

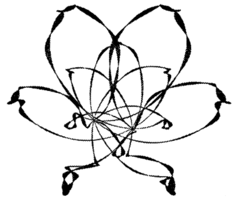
参考文献

1) ド・ブローイ 1929 年ノーベル賞受賞講演，『ノーベル賞講演＝物理学　第 5 巻』，中村誠太郎・小沼通二編（講談社，1978 年）; 小島智恵子，フランスにおける量子論の歴史（2004，学位論文）．
2) B.L. Van Der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics*, Dover Publications, Inc., New York, 2007; ハイゼンベルク方程式・ディラック方程式（臨時別冊・数理科学「現象から方程式を作り出す」，サイエンス社，2012 年 1 月号）;『新版　シュレディンガー方程式』（SGC Books，サイエンス社，2007 年）．
3) The Golden Age of Theoretical Physics: P.A.M. Dirac's Scientific Work from 1924 to 1933 in *Aspects of Quantum Theory*, A. Salam・E.P. Wigner 編（Cambridge Univ. Press, 1972）に詳しい．
4)『ノーベル賞講演＝物理学　第 10 巻』，中村誠太郎・小沼通二編（講談社，1978 年）;『物理法則はいかにして発見されたか』，R.P. ファインマン，江沢洋訳（ダイヤモンド社サイエンスブックス，1983 年）．

（なか・しげふみ，日本大学理工学部）

流体力学におけるオイラーの発想と現代物理学

粒子性と波動性



神部　勉

1. はじめに

L. オイラーが流体力学の運動方程式を最初に導出したのは18世紀半ばで[1]，それから約250年の間，彼の導き出した偏微分方程式とその解の研究が続けられてきた．オイラーの運動方程式は，物理学における最初の偏微分方程式であった．さらにその方程式が一つの学問分野を形成した著しい例である．オイラーが流体力学の方程式を考案したきっかけは，その前に質点の運動方程式を研究していたことにあった[2]．

オイラーは「力学の新原理の発見」と題する論文で[3]，質点に対する最初の3次元デカルト座標系での運動方程式を書き下した．時刻 t での質量 m の質点の位置を $(x(t), y(t), z(t))$，速度を (u, v, w) とすると，微小時刻 dt の後，質点は x 方向に $dx = u\,dt$ だけ移動する．さらに質点に作用する力を (P, Q, R) とすると，x 方向の速度変化は $m\,du = P\,dt$ である．さらに $d(udt) = ddx$，$md(udt) = mdu\,dt = P\,dt^2$ の関係を使うと，オイラーが書下した原形の運動方程式は

$$m\,ddx = P\,dt^2, \quad m\,ddy = Q\,dt^2,$$
$$m\,ddz = R\,dt^2. \tag{1}$$

となる*1)．この方程式は今はニュートンの運動方程式と呼ばれるが，実は最初にこの式を書いたのはオイラー（1750）[3]であった．ニュートンの時代（1687）[4]には微分方程式は知られておらず，彼は物体の法則を“[運動量の変化率]=[動力]”と定義し，ユークリッド幾何学で解を求めた．

オイラーは，友人のベルヌーイが1738年に流体速度と圧力の関係を表すベルヌーイの式を見出したことを知っていた．流体は質点とは異なり，質量が連続的に分布している．オイラーが流体の運動方程式を提出したのは，質点の運動方程式の提出からわずか5年後であった[1]．それは，物質の分子構造論あるいは分子運動論より100年も前であったが，物質が微小な粒子（corpuscles）から構成されているという考えはあった．

オイラーに因んで言えば，音波の3次元波動方程式を最初に導出したのも彼であった（1759）[6]．

2. オイラー流体力学

流体運動の力学を創出するに当ってオイラーは新しく概念を明確にする必要があった．物体の微視的構造は当時は全くわかっていなかった．それが巧みに利用されて，相い反するような設定で，連続の式と運動方程式が導出された．

2.1 連続の式

まず最初に，流体を理想的な連続体とみなして，流体は破断の間隙がなく連続して流れると仮定し，その場合の質量保存則を表現する連続の式を導い

*1) デカルト座標系の式 (1) では，位置 (x, y, z)，速度，加速度等の2つのベクトルが成分毎の和によって，平行四辺形の法則に従うとき，力 (P, Q, R) もやはり同じ性質を有することを示している．

た．数式表現で書くと，時刻 t，点 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ での流体の密度を $\rho(t,\boldsymbol{x})$，流れの速度を $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})$ とすると，**連続の式**は

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \qquad \left(\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{2}$$

と表される．実際，第2項を右辺に移項して，任意の体積 V について積分すると，

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_V \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v})\, dV.$$

微小体積 dV 中の質量は $\rho\, dV$ であるから，左辺は体積 V の中の全質量 $\int_V \rho dV$ の時間増加率を表す．右辺の体積分はガウスの定理によって表面積分 $\oint_S \rho v_n dS$ に変換される（v_n は速度の外向き法線成分）．これは V を囲む閉曲面 S から流出する流体量を表す．負号があるので，右辺は流出が V 内の流体の減少になることを表している．

2.2 運動方程式

運動方程式を組み立てるためにオイラーは新たに流体粒子，圧力，流体加速度の概念を定義した．(i) 流体の内部に微小体積 ΔV をとると，その質量は $m_* = \rho\,\Delta V$ である．これを流体粒子と呼び，これが質点のように運動すると仮定する．(ii) 流体粒子に重力のような m_* に比例する外力と，圧力のような表面積に比例する内力が作用するとする．(iii) 流体粒子の加速度 $\boldsymbol{A}$ を速度場 $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})=(u,v,w)$ を使って定義する（以下に示す）．これは前の連続の式とは正反対の粒子的描像であってオイラーの天才的着眼点である．圧力からの力を $\boldsymbol{P}$，単位質量当りの重力（加速度）を $\boldsymbol{g}$ とすると，流体粒子を質点のようにみる運動方程式は，

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{m_*}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{g} \tag{3}$$

の形で表される．ここでは，流体は粘性のない完全流体と仮定する．オイラーに従って，$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{A}$ の形をいまから導こう（$\boldsymbol{g}$ は既知とする）．

圧力項 $\boldsymbol{P}$：“ある体積 V の流体が平衡にあるとしたら，その表面 S のすべての点で等しい力が，その面に垂直に作用する.” これを静止状態の流体の圧力の定義とした．現代にも通用する定義である．もし仮に流体が微小な無数の粒子（固体の corpuscles）から構成されているとしたら不安定

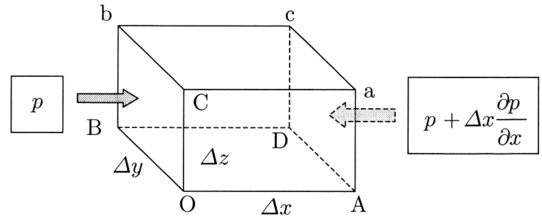


図1　直方体 OADB-Cacb.

であろうと推論し，そのような物質構造を想定せず，今の分子運動論でも通用する圧力によって流体の性質を規定した．数式では，面積 a^2 の微小な面に作用する力を $p\,a^2$ で表し，その積分として，容器の壁に作用する力あるいは流体内部に想定した表面に作用する力が決められる．

そこで，流体内部に図1の直方体 OADB-Cacb をとり，辺 OA, OB, OC は x 軸，y 軸，z 軸に平行とし，長さはそれぞれ Δx, Δy, Δz とする．直方体の左面 OCbB に左から作用する圧力を p とすると，面積は $\Delta y \Delta z$ なので，力の大きさは $p\,\Delta y \Delta z$．これは x 軸の正方向に作用する．反対側の右面 AacD に作用する圧力は $p+p_x\Delta x$ で，力の大きさは $-(p+p_x\Delta x)\Delta y\Delta z$ で，負 x 軸の方向に作用する．合力は，差引きの結果，次式となる：

$$-p_x\,\Delta V = -\frac{m_*}{\rho}\,p_x, \qquad \left(p_x \equiv \frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

ここで，$m_* = \rho\Delta V$, $\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ を使った．同様にして，y 軸方向の力は $-(m_*/\rho)\,p_y$，z 軸方向の力は $-(m_*/\rho)\,p_z$ で，まとめると，

$$\frac{1}{m_*}\boldsymbol{P} = -\frac{1}{\rho}\left(p_x, p_y, p_z\right) = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\; p. \tag{4}$$

これが式 (3) の右辺第1項を与える．

加速度項 $\boldsymbol{A}$：その表現も独創的であった．時間 t と座標 (x,y,z) に依存する速度場 $\boldsymbol{v}=(u,v,w)$ が与えられたとする．時刻 t に点 $\mathrm{O}(x,y,z)$ にあった粒子は，dt 時間の経過の後，点 $\mathrm{O}'\,(x',y',z')$ に移動する．そこでの $u' = u(t+dt, x', y', z')$ は

$$\begin{aligned} u' &= u(t+dt, x+u\,dt, y+v\,dt, z+w\,dt) \\ &= u(t,\mathrm{O}) + dt\,u_t + udt\,u_x + vdt\,u_y + wdt\,u_z. \end{aligned}$$

最後の右辺では $O((dt)^2)$ の項は省略した．加速度 $\boldsymbol{A}$ の x 成分 A は，差 $[u' - u(t,O)]$ を dt で割

り，$dt \to 0$ の極限をとって得られる．すなわち，

$$A = u_t + u\,u_x + v\,u_y + w\,u_z = u_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u$$

を得る．ここで，$\boldsymbol{v}\cdot\nabla = u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$．同様にして，$\boldsymbol{A}$ の y 成分 B，z 成分 C は

$$B = v_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v, \quad C = w_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)w$$

である．速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ を使って，加速度 $\boldsymbol{A}$ をベクトル形で書くと，

$$\boldsymbol{A} = (A, B, C) = \boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \tag{5}$$

を得る．式 (3) の $(1/m_*)\boldsymbol{P}$ および $\boldsymbol{A}$ に，いま上で求めた式 (4) および (5) を代入すると

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \boldsymbol{g}. \tag{6}$$

これが**オイラーの運動方程式**である．

質点の運動方程式と同じ形の式 (3) が元になっているが，ここに導かれた式 (6) は，場の時間発展の方程式になっている．もしある時刻 $t = 0$，各点 $\boldsymbol{x}$ で，速度場 $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(0, \boldsymbol{x})$，圧力場 $p_0(\boldsymbol{x})$ および密度場 $\rho_0(\boldsymbol{x})$ が与えられたとすると，右辺は既知である．圧力勾配 $\mathrm{grad}\,p_0$ は微分 $\partial p_0/\partial x$ 等の計算から求まるからである．左辺第 2 項も既知である．$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla) = u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$ は空間微分の演算子で，$\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})$ が与えられれば，$(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0$ は計算で求まるからである．従って，式 (6) は初期の速度の時間微分 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t|_{t=0}$ を与える式となる．

同様の考察を連続の式 (2) に当てはめると，それは初期の密度の時間微分 $\partial\rho/\partial t|_{t=0}$ を与える式となる．さらに圧力 p の時間微分を与える式が必要で，それはエントロピー方程式で与えられる．

2.3 熱力学的状態量

ここでは，エネルギー方程式から p の式が得られるということで満足することにして，方程式だけを記すことにする．粘性のない完全流体では，運動は断熱的で，比エントロピー s（単位質量当り）は，流体に運ばれながらも保存される：

$$s_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)s = 0. \tag{7}$$

これは，加速度 A を求める式において，u を s で置き換えて，$(s' - s(t, O))/dt = 0$ として得られる．理想気体の状態方程式（$p = (c_p - c_v)\rho T$）および比エンタルピー（$h = c_p T$），および状態量の変分の式 $dh = (1/\rho)\,dp + T\,ds$ より，

$$\frac{dp}{p} = \gamma\frac{d\rho}{\rho} + \frac{ds}{c_v} \tag{8}$$

を得る．ここで，T は温度，c_v は定積比熱，c_p は定圧比熱で，$\gamma = c_p/c_v$．式 (2) から ρ_t，式 (7) から s_t が知られれば，式 (8) から p_t が得られる．

以上の式 (2), (6), (7), (8) が，完全流体の運動を支配する方程式系である．熱力学の式を除けばオイラー（1755）[1]によって確立されたのである．

3. 粒子性と波動性

量子力学が記述する微視的世界には，粒子性と波動性があることが強調される．しかし巨視的世界を記述する流体力学にも，粒子性と波動性がある．ここでいう流体力学の粒子性は，流体が分子から構成されているという意味ではなく，質点と同じ形の式 (3) で記述されるという意味である．前節では流体の運動方程式が式 (3) の形に表せる一方，連続的な流れ場を想定して連続の式が導かれた．江沢洋氏[5]の言葉を借りれば，「量子力学の世界を語るのに，粒子的な言葉を使うこともできるし，波動的な言葉で一貫することもできるのである.」これは流体力学にも当てはまるのである．粒子性と波動性は指摘するまでもないと思われてか，量子力学との類似が云々されることはないが，本記事の後半はその点に焦点を当てる．

流体の波動性は音波の方程式を導けば十分であろう．いま一様な静止状態にある流体が占める空間があったとする（重力効果は省略する）．密度，圧力は一定で，それぞれ ρ_0, p_0，速度は $\boldsymbol{v}_0 = 0$ とする．この状態に微小な摂動が加わり，密度，圧力，速度が次の変動状態になったとする：

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'.$$

摂動は微小（$|\rho'| \ll |\rho_0|, |p'| \ll |p_0|$）で，方程式は変動量 $\rho', p', \boldsymbol{v}'$ について線形化できると仮定する．上式を式 (2) に代入して，$\rho', \boldsymbol{v}'$ について 1 次の項だけを残すと，

$$\partial_t\rho' + \rho_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}' = 0 \tag{9}$$

を得る．同様に運動方程式 (6) からは（$\boldsymbol{g}$ を省略）

$$\rho_0\,\partial_t \boldsymbol{v}' = -\mathrm{grad}\ p' \qquad (10)$$

を得る．変動は速やかで断熱的（従って $ds=0$）とすると，式 (8) は $dp' = c_0^2\, d\rho'$ を与える（ただし $c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$）．これを使うと，式 (10) は

$$\rho_0\,\partial_t \boldsymbol{v}' = -c_0^2\,\mathrm{grad}\ \rho' \qquad (11)$$

式 (9) と (11) とから $\boldsymbol{v}'$ を消去すると，

$$\partial_t^2 \rho' - c_0^2\,\nabla^2 \rho' = 0 \qquad (12)$$

を得る．ただし，$\nabla^2 \equiv \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$．上式は密度変動 ρ' に対する**波動方程式**であり，位相速度 c_0 で伝わる音波の式である．$c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ は音速を表している．教科書に記されることはほとんどないが，この 3 次元の音波の方程式もオイラー（1759）[6] によって初めて導かれた．

連続の式と運動方程式とから波動方程式が導かれた．このようにして流体力学の方程式系が波動性と粒子性の両面を有することがわかる．その両面性の淵源はより深いところにある．以下で，変分原理によってその一端を見てみよう．

4. ハミルトンの変分原理

4.1 質点

質点の運動方程式はハミルトンの原理から導かれる．空間を 2 次元として，**ラグランジュ関数**を

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \Phi(x, y) \quad (13)$$

で定義する．m は質点質量で，(x, y) は位置座標，$(\dot{x}, \dot{y})$ は速度（$\dot{x} = dx/dt$ など），第 1 項は運動エネルギー，$\Phi(x, y)$ は外力のポテンシャルである．変分原理では，作用関数 J を次の形で定義する：

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt. \qquad (14)$$

t_1, t_2 は初期および最終の時刻である．**ハミルトンの変分原理**は，質点の運動が "作用 J を最小（もしくは最大）にする軌道 $(x(t), y(t))$ をとる" ことを要請する．すなわち，$x, y, \dot{x}, \dot{y}$ の変分を

$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad \dot{x} + \delta\dot{x}, \quad \dot{y} + \delta\dot{y}$$

として，それらを $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ に代入すると，ラグランジュ関数は，L と変分 δL の和 $L + \delta L$ の形で表せる．δL は

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y$$

で与えられる．ここで $\delta\dot{x} = (d/dt)\delta x$, $\delta\dot{y} = (d/dt)\delta y$ である．それゆえ右辺第 1 項は

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big)\,\delta x$$

と書ける．第 2 項も同様で，x を y に変えた式が得られる．作用関数の変分 δJ は $\delta(\int L\,dt) = \int \delta L\,dt$ で与えられる．上で書き換えた式を使うと，

$$\begin{aligned}\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \Big[&\Big(-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) + \frac{\partial L}{\partial x}\Big)\,\delta x \\ &+ \Big(-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\Big) + \frac{\partial L}{\partial y}\Big)\,\delta y \\ &+ \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big) + \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big)\Big]\,dt.\end{aligned}$$

最後の行は，時間の全微分なので積分される．力学の変分の要請条件では，両端時刻 t_1, t_2 で $\delta x = 0$, $\delta y = 0$ とする．このとき積分された 2 項は消える．すなわち変分原理は，粒子軌道の両端を固定したとき，その間の軌道を決定する条件を与える．

ハミルトンの変分原理は**最小作用の原理**ともいわれ，任意の変分 $\delta x, \delta y$ に対して，$\delta J = 0$ を要求する．残りの 2 行が消えるためには，$\delta x, \delta y$ が任意なので，その係数が消える必要がある：

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\Big) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad (15)$$

これは**ラグランジュの方程式**と力学では呼ばれる．3 次元への拡張は容易で，ここではスペースを節約するために 2 次元で考えただけである．

式 (15) は，数学の変分法ではオイラー・ラグランジュの方程式と呼ばれる．式 (13) のラグランジュ関数 L を代入すると，いわゆる質点の運動方程式，

$$m\ddot{x} = -\Phi_x, \quad m\ddot{y} = -\Phi_y$$

が得られる．これは式 (1) の最初の 2 つである．

4.2 完全流体

流体の運動の変分原理について考察してみよう．やはり 2 次元 (x, y) 空間とし，速度場を $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) = (u, v)$ とする．時刻 $t = 0$ で点 $\boldsymbol{x} = (x, y) = (a, b)$ に位置する流体粒子に注目する．微小な時刻 dt 後には $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}dt$ に移動する．この

流体粒子をパラメータ (a,b) でマーク付けし，粒子のラベルとする．a, b の値が異なれば別の粒子とする．時刻 τ での流体粒子の位置，すなわち粒子軌道は $x = X(\tau,a,b)$, $y = Y(\tau,a,b)$ と表せよう．ここで $a = X(0,a,b)$, $b = Y(0,a,b)$，すなわち初期の粒子座標を粒子ラベルとする．初期の流体密度 ρ_0 は一様とし，その定数は 1 とする．そのときには，微小体積（面積）$dxdy$ に含まれる流体質量 m_* は，$m_* = \rho_0\, dxdy = da\, db$ である．流体粒子は速度 (X_τ, Y_τ) で運動し，その密度 ρ は変わっても，同じ流体粒子 (a,b) については，質量は不変で $m_* = dadb =$ 一定 である：

$$m_* = \rho\, dxdy = \rho\, dXdY = da\, db,$$
$$\sigma \equiv 1/\rho = \partial(X,Y)/\partial(a,b). \tag{16}$$

変換 $(t,x,y) \Rightarrow (\tau,a,b)$ を $t=\tau$, $x = X(\tau,a,b)$, $y = Y(\tau,a,b)$ で定義する．完全流体の運動は断熱的である．比エントロピーを $s(t,x,y) = S(\tau,a,b)$ とすると，$S_\tau = 0$, $S_\tau = s_t + us_x + vs_y$ なので，式 (7) と一致する．

質点の場合の (13) の拡張として，**流体のラグランジュ密度**[7]を次の Λ で定義する：

$$\Lambda[X,Y,X_\tau,Y_\tau] = \frac{1}{2}\big((X_\tau)^2 + (Y_\tau)^2\big)$$
$$-\mathcal{E}(\sigma,S) - \Phi(X,Y). \tag{17}$$

第 1 項は単位質量当りの運動エネルギー，$\mathcal{E}$ は内部エネルギー，Φ は力のポテンシャル．流体の場合は，連続分布する全質量にわたっての積分 $\int \Lambda\, dm = \int\int \Lambda\, dadb$ を全ラグランジュ関数 L,

$$L = \int\int \Lambda[X,Y,X_\tau,Y_\tau]\, da\, db \tag{18}$$

と定義する．ラグランジュ関数 L が与えられれば，ハミルトンの原理は質点の場合と同様である．作用関数 J を時間積分で定義し，a, b 固定の変分 δ で，$\delta J = 0$ を要請すると，オイラー・ラグランジュの方程式は，式 (15) の代わりに

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial\Lambda}{\partial X_\tau}\Big) = \frac{\partial\Lambda}{\partial X},\quad \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial\Lambda}{\partial Y_\tau}\Big) = \frac{\partial\Lambda}{\partial Y} \tag{19}$$

となる．式 (17) の Λ を代入すると，これらは

$$X_{\tau\tau} = -\mathcal{E}_X - \Phi_X, \quad Y_{\tau\tau} = -\mathcal{E}_Y - \Phi_Y \tag{20}$$

となる．これは (3) に相当する式で，流体の粒子性を示す式が得られる．しかも，これはオイラーの方程式 (6) に帰着する．左辺の $X_{\tau\tau}$, $Y_{\tau\tau}$ が 2.2 節の加速度項の導出で得た A, B に対応することは明らかであろう．右辺の第 2 項は $-(\Phi_X, \Phi_Y) = -\mathrm{grad}\,\Phi = \boldsymbol{g}$．残るは右辺第 1 項である．$a, b$ 固定の変分では $\delta S = 0$ なので，$\delta\mathcal{E} = -p\,\delta\sigma + T\delta S = -p\,\delta\sigma$．これに式 (16) の σ を代入して，

$$\delta\mathcal{E} = -p\,\delta\sigma = -p\,\delta(X_aY_b - X_bY_a)$$
$$= \Big(p_aY_b - p_bY_a\Big)\delta X - \Big(p_aX_b - p_bX_a\Big)\delta Y$$
$$+ \mathrm{Div}.$$

ここで Div は $A_a + B_b$ の形の式で，積分されて結果には影響のない項である．2 行目の第 1 項は $\mathcal{E}_X\delta X$ を与えるが，係数 $\mathcal{E}_X$ は

$$\mathcal{E}_X = \frac{\partial(p,Y)}{\partial(a,b)} = \frac{\partial(p,Y)}{\partial(X,Y)}\frac{\partial(X,Y)}{\partial(a,b)} = \frac{1}{\rho}\,p_X.$$

同様に $\mathcal{E}_Y = (1/\rho)\,p_Y$ となるので，(20) がオイラーの方程式 (6) に一致することがわかる．

変分原理からも同じ運動方程式が導かれる事実は，オイラーの天才的洞察力の賜物といえようか．

5. ゲージ場

不思議に思えることかも知れないが，流体にもゲージ場がある[7]．言葉を変えるとラグランジュ関数の定義に**隠れた変数**があるのである．

変換 $(t,x,y) \Rightarrow (\tau,a,b)$ によって，(a,b) 空間を考える．粒子パラメータ (a,b) は，前節では簡明のための理由で，初期の粒子位置で定義したが，粒子の同定が一意的に可能なら任意に選べる．
仮定：『(a,b) はラベルなので，粒子の物理的な位置 X, Y はその変換でも不変とする．』これは物理学のゲージ変換を念頭においた考察である*2)．

(A) 次の並進変換 $(a,b) \Rightarrow (a',b')$ を考える：

$$(a',b') = (a,b) + (\delta a, \delta b) \tag{21}$$

$(\delta a, \delta b$：変分関数）．上で述べたことから，

$$X' \equiv X(\tau,a',b') = X(\tau,a,b),\ Y' = Y(\tau,a,b).$$

*2) 独立変数を (t,x,y) とするとき，場は小文字，(τ,a,b) を独立変数とする同じ場は大文字で表す．

さらに τ で微分すれば，速度は

$$U' = X'_\tau(\tau, a', b') = X_\tau(\tau, a, b) = U$$

となる．同様に $V' = Y'_\tau = Y_\tau$ で，並進変換 (21) の下で速度 X_τ, Y_τ は不変である．従って，新しい (a', b') 空間でのラグランジュ密度 $\Lambda'[X', Y', X'_\tau, Y'_\tau]$ は $\Lambda[X, Y, X_\tau, Y_\tau]$ と等しい．このように式 (17) の Λ は不変なので，変換 (21) はゲージ変換とみなされる．そのとき加速度

$$X_{\tau\tau} = \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} \equiv \boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},$$

も不変である．この意味で，$D\boldsymbol{v}/Dt$ はゲージ不変である．特に第 2 項 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ は共変微分 $D\boldsymbol{v}/Dt$ の**ゲージ場**で[7]，それを $\boldsymbol{E}$ とする：

$$\boldsymbol{E} \equiv (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

(B) 次に，式 (21) の変分に，質量不変の要請 $da\,db = da'db'$ を課す．すなわち，次の条件

$$da'db' = \frac{\partial(a', b')}{\partial(a, b)}\,da\,db = da\,db$$

から，$\partial(a', b')/\partial(a, b) = 1$ を得る．式 (21) より，

$$1 = \frac{\partial(a', b')}{\partial(a, b)} = \begin{vmatrix} 1 + \partial_a(\delta a) & \partial_a(\delta b) \\ \partial_b(\delta a) & 1 + \partial_b(\delta b) \end{vmatrix}.$$

右辺は $1 + \partial_a(\delta a) + \partial_b(\delta b) +$ (高次項) なので，$\partial_a(\delta a) + \partial_b(\delta b) = 0$ が必要．この式は，任意の関数 $\tilde{\psi}(a, b)$ によって，$\delta a = \partial_b\tilde{\psi}$, $\delta b = -\partial_a\tilde{\psi}$ と定義することで満たされる．Λ の変分は $\delta\Lambda = (\partial_a\Lambda)\delta a + (\partial_b\Lambda)\delta b$ なので，代入すると

$$\partial_a\Lambda\,\partial_b\tilde{\psi} - \partial_b\Lambda\,\partial_a\tilde{\psi} = \partial_b(\partial_a\Lambda\,\tilde{\psi}) - \partial_b(\partial_b\Lambda\,\tilde{\psi})$$

となり，変分は $da\,db$ での積分で消えるので，式 (18) のラグランジュ関数はゲージ不変である．

一方，a だけの変分に対して，微分 $\partial_a\Lambda$ は

$$\partial_a\Lambda = X_\tau\,\partial_a X_\tau + Y_\tau\,\partial_a Y_\tau - \partial_a(\mathcal{E} + \Phi).$$

第 1 項を $\partial_\tau(X_\tau\,\partial_a X) - X_{\tau\tau}\partial_a X$ と書換え，第 2 項も同様にして，式 (20) を使うと，$\delta_a\Lambda = (\partial_\tau V_a)\delta a$ を得る．ただし，$V_a = X_\tau X_a + Y_\tau Y_a$．$b$ の変分も同様で，$V_b = X_\tau X_b + Y_\tau Y_b$ とすると

$$\delta\Lambda = \delta_a\Lambda + \delta_b\Lambda = (\partial_\tau V_a)\delta a + (\partial_\tau V_b)\delta b$$

を得る．$\delta a, \delta b$ の式を代入して変形すると

$$\delta\Lambda = -(\partial_\tau\Omega)\,\tilde{\psi} + \partial_b(\partial_\tau V_a\,\tilde{\psi}) - \partial_a(\partial_\tau V_b\,\tilde{\psi}),$$

ただし，$\Omega \equiv \partial_b V_a - \partial_a V_b$．第 2, 3 項は積分されてしまうので，$\delta\Lambda = (\partial_\tau\Omega)\,\tilde{\psi}$ を得る．任意の $\tilde{\psi}$ に対して $\delta L = 0$ であるから，$\partial_\tau\Omega = 0$ を得る．Ω は (x, y) 空間の渦度 $\omega = v_x - u_y$ を (a, b) 空間に変換した場である[7]．$\partial_\tau\Omega = 0$ である事実は，渦度 ω がゲージ場であることを意味する．これは 3 次元でも成立するので，場 $\boldsymbol{H}$ を次で定義する：

$$\boldsymbol{H} \equiv \nabla\times\boldsymbol{v}.$$

実は，ここに示した 2 つの場 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は，電磁気学の電場，磁場に類似の場である．完全流体の方程式系から，それらがマクスウェル方程式と同じ形の「流体マクスウェル方程式」を満たすことを導くことができる．それゆえ音波は電磁波に類似の波動で，流体の波動性の根拠となる．

スペースが尽きたのでここで終ることにして，詳しくは文献 7, 8) を紹介することにする．流体力学の現代物理学的側面について述べてみた．

参考文献

1) L. Euler: Principes généraux du mouvement des fluides, *L. Euleri Opera Omnia*, ser.II, vol.XII, 54–91 (1755); *English translation* (by T.E. Burton), General laws of the motion of fluids, *Fluid Dynamics*, vol.**34** (no.6), 801–822 (1999).

2) C. Truesdell: The Rational Mechanics 1638–1788, *Introduction to L. Euler Opera Omnia*, ser.II, vol.XI_2, 11–428 (1960).

3) L. Euler: Decouverte d'un nouveau principe de Mecanique (Discovery of a new principle of mechanics), *L. Euler, Opera Omnia*, ser.II, vol.V (1750).

4) I. Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687); 和訳，『プリンシピア（自然哲学の数学的原理）』(中野猿人訳・注，講談社，1977)．

5) 江沢洋：『量子と場』，ダイヤモンド社 (1976)．

6) L. Euler: Supplement aux recherches sur la propagation du son, *Mem. de l'acad. des sci. de Berlin* **15**, 210–240 (1759).

7) T. Kambe: *Geometrical Theory of Dynamical Systems and Fluid Flows* (Rev. ed), Chap.7, World Scientific (2010).

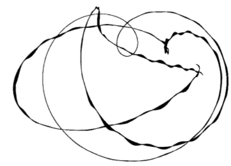
8) T. Kambe: A new formulation of equations of compressible fluids by analogy with Maxwell's equations, *Fluid Dyn. Res.* **(42)**, 055502 (2010).

（かんべ・つとむ，陳省身数学研究所）

特集／面白い発想［物理編］

相対論と量子論

古典論からの脱却



森川　雅博

前世紀のはじめ，物理学の基本概念を揺るがす大きな流れが，相対論と量子論を作った．今では両理論は当り前に受け入れられ，なくてはならない現代物理の基礎となっている．相対論と量子論は性格がお互いに全く異なるが，ほぼ同時期の人々に議論され育てられた．両理論の偉大な考え方に何か共通点があるのだろうか？　そのような思考法は，現在の我々にとっても何か示唆を与えるのだろうか？

ニュートン力学を基調とした古典理論や日常の経験からすると，両理論は素直に，不思議な世界であるかもしれない．不思議であっても手続きを習得すれば効率よく学習でき研究も進むかも知れない．しかし少し回り道をして，その手続きは必須かどうか，いろいろな視点の整合性を探って不思議さを味わっていくのも楽しい．物理学の発展が「不思議さに触発されその解消を目指す」形で発展してきたのであれば，この不思議さをどのように整合するのかを幅広く考えていくことは新しい物理の発展に繫がらないだろうか？

1. 単に見えるものが実在するとは限らない

摩擦が働く物体の運動は，力を抜くと止まってしまう．その物体の位置を x と書くと，x の時間発展は，時間の1階微分方程式という明快な形

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(x) \tag{1}$$

に書ける．ここでは測定したままの数値 x だけが意味をもつ．

一方，多粒子の複雑な相互作用の結果出てくる摩擦力を含まない，もっと基礎的な粒子の運動方程式は時間微分の2階の形をしていて，位置 x の加速に対して

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(x) \tag{2}$$

と表され，これはニュートンの運動方程式と呼ばれている．重力や電磁気力のようなたいていの基本的な力がそうであるように，右辺が相対的な位置だけに依存する場合を考えよう：例えば，$\vec{x}_1$ にある電荷から $\vec{x}_2$ にある電荷に働く力は $F(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ の形をしている．この場合，どのように観測者が座標 $\vec{x}$ を測るかという不定性があって，この式(2)は，定数 $\vec{v}$ に対して

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t \tag{3}$$

という線形変換（ガリレイ変換）を許す（時間は変わらない：$t' = t$（図1））．つまり，式(3)（$v \in \mathbb{R}$）で結びつく無数の座標系（慣性系と呼ぼう）による記述があるがどれで書いても運動は式(2)に従う．運動を記述するとき，どの座標系に基づくかによって測定数値は異なるので，座標系とそこで得られた数値の組を指定して，初めて意味がある．

これは，物理の基礎理論は座標のとり方によらない，という「相対性原理」の形に集約される．その場その場において見えるものが，個々に直接実

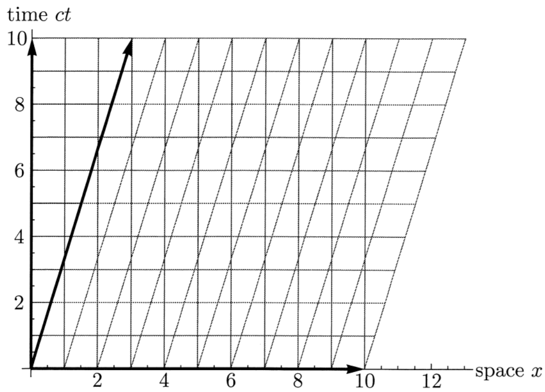


図 1　式 (3) で結ばれる 2 つの座標系の関係．静止系の座標に対して，x 方向に一様速度 v で動いている座標では，時間の方向は変わらずに空間方向に歪んでいる．

在を意味するのではなく，**複数の整合的な見え方の総体として物理的実在がある**（例えば文献 1)）．

一方量子論においては，この視点はもっと顕著である．ミクロの世界では，一般に同じ状態に対しても同じ装置で同じ物理量を測っても測定するごとに結果が異なる．コントロールすることもできないのでこれは「本質的に確率的な現象」である．ただし，結果の値の**頻度分布は普遍的**で，測定回数を増していくとその分布ははっきりとしてくる．この変わらない部分を記述する形で量子論の基礎方程式が作られた．つまり，物理量は演算子（行列）に，状態はその演算子が作用する空間（ベクトル）となる（例えば文献 2)）．

2. 光と物質の隔絶

相対論ができ上がりつつある時期，隔絶した 2 種類の存在，光と物質があった．光は電磁場としてマックスウェル方程式で表され，常に一定の速度 $c = 299,792,458\,\mathrm{m/sec}$ で伝播する．一方物質は常にその速度 c より低速で伝播する．しかもこれら光と物質はお互いに相互作用する（表 1）．

表 1

光	物質
マックスウェル方程式	ニュートン方程式
ローレンツ変換	ガリレイ変換
波	粒子
局在不能	局在可能
時に粒子的	時に波的

光を含む電磁場を記述するマックスウェル方程式は，真空中で，場 $\vec{E}(t,x), \vec{B}(t,x)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \mathrm{rot}\,\frac{\vec{B}}{\mu_0} &= \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \mathrm{div}\,\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \mathrm{div}\,\vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

の形で表され（例えば文献 3)），源 $\vec{J}, \rho$ がなければ，$c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$ として，

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}\right)\vec{E} = 0 \tag{5}$$

などとまとめられる*1)．この方程式は，式 (3) の変換で形が変わってしまう．つまり，式 (4), (5) が正しければ，時間空間は式 (3) の形でまとめられる実態ではない．式 (5) を不変にする線形変換を求めてみよう*2)．すると，x 方向に速度 v で動く系の座標にプライム ($'$) をつけると，時間も含めて

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned} \tag{6}$$

の形の変換（ローレンツ変換）になる．ここで，$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2}, v \in \mathbb{R}$．つまり，時間空間は式 (6) の形でまとめられる実態であることが分かる（図 2）．そして，変換式 (6) に対して電磁場自身は，

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1, E_2' = \gamma\left(E_2 - \frac{v}{c}B_3\right), \\ E_3' &= \gamma\left(E_3 + \frac{v}{c}B_2\right), \\ B_1' &= B_1, B_2' = \gamma\left(B_2 + \frac{v}{c}E_3\right), \\ B_3' &= \gamma\left(B_3 - \frac{v}{c}E_2\right) \end{aligned} \tag{7}$$

と変換されることになる*3)．このように，お互い

*1)　ここに出てきた c は上の光速度と同一の値になる．光が電磁波である一つの根拠．

*2)　一般の線形変換式を書き，式 (5) の形が変わらないように係数を決める．

*3)　式 (4), (6) を用いて計算する．

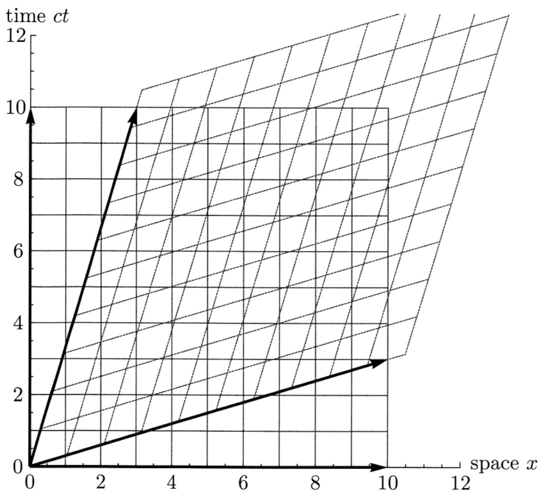


図2 式 (6) のローレンツ変換で結びつく2つの座標系を描いた．静止系の座標に対して，x 方向に一様速度 v で動いている座標では，時間および空間方向に v/c だけ歪んでいる．$v \to c$，つまり $\gamma \to \infty$ の極限で，座標系は最大に歪み，45 度の直線になる．

に変換式に入ってくるものどうしは実は同属であり，見方（＝座標変換）によってそれぞれの一部が見える，というファミリーなのである．時間と空間もファミリーであり，電場と磁場もファミリーである．相対性原理とは，そのような**同属ファミリー**を同定している，ということもできるだろう．結局，真空中の光速度が，光源や観測者の運動と関係なく一定であることが実験的に確認され，相対性原理は式 (3) ではなく，式 (6) に対して成立すべきことがわかった．

一方，量子論においても，波と考えられていた光の粒子性と，粒子と考えられていた電子たちの波動性が議論されつつあった．この光の粒子が持つエネルギー E は振動数 ω と $E=\hbar\omega$ の関係にあることが示唆された（光電効果，$\hbar = 1.05\times10^{-34}$ Jsec）．同様に，ベクトルの保存量である運動量 $\vec{p}$ に対しても波数 $\vec{k}$ と $\vec{p}=\hbar\vec{k}$ の関係があると推察される．

波と考えられる粒子の従う方程式は，電場 $\vec{E}(x,t)$ のように時間空間に広がった関数 $\psi(t,x)$ に対して，式 (5) にならって作られるだろう．波の形は $\mathrm{e}^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ の形をしているだろう．つまり，

$$\mathrm{e}^{-iEt/\hbar+i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}. \tag{8}$$

この波の節や山などの位相はどの座標から見ても変わらないので，$\{ct,\vec{x}\}$ の組と $\{\omega,\vec{k}\}$ の組，つまり $\{E/c,p\}$ の組は（$v\to -v$ として）式 (6) と逆に変換する必要がある．従って，

$$\begin{aligned} p' &= \gamma\left(p+\frac{v}{c^2}E\right),\\ E' &= \gamma\,(E+vp)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

特に，静止系におけるエネルギー E_0 に対して，運動系では $E=\gamma E_0$ となることがわかる．$v\ll c$ なら，$E=E_0+\left(v^2/2c^2\right)E_0+\ldots$ となり，v^2 の現れるこの第2項を古典力学の運動エネルギーと同定すると $E_0=mc^2$ であるべきだ．つまり，

$$E=\gamma mc^2 \approx mc^2+\frac{1}{2}mv^2+\ldots \tag{10}$$

である．同様に，運動系では $p=\gamma vE_0/c^2=\gamma mv$ となる．これと式 (10) から，

$$E^2=p^2c^2+m^2c^4 \tag{11}$$

の関係が出る．この関係と古典的な関係式 $E=p^2/(2m)$ との対比を図3に描いた．この図から**光と物質の隔絶**が明快になる．つまり，光と物質のグラフは決して混じることがない．理論的にはもう一つの種族として，常に光速度以上で移動するタキオンがあるが，これが観測された例はないようだ．

共変な式 (5) は，もっと単純で不変な項 $\Lambda(x,t)$ を付け加える余地がある．すると，複素関数 $\Psi(t,\vec{x})$ に対して，

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial\vec{x}^2}+\Lambda(x,t)\right)\Psi=0 \tag{12}$$

となる．このままだと Ψ は式 (8), (10) から決まる非常に大きな振動数 $\left(mc^2/\hbar\right)\equiv\omega_0$ が卓越してしまうので，その部分を差し引いた運動に着目したい．そこで，$\psi(t)$ をゆっくり変化する関数（$\ddot{a}\ll\omega_0\dot{a}\ll\omega_0^2$）として，$\Psi=\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\psi(t)$ を式 (12) に入れ，先ほどの $E=\hbar\omega$ を用いて，$\left(\hbar^2/(2m)\right)\left(\Lambda+(\omega_0/c)^2\right)$ を改めて V と書くと，

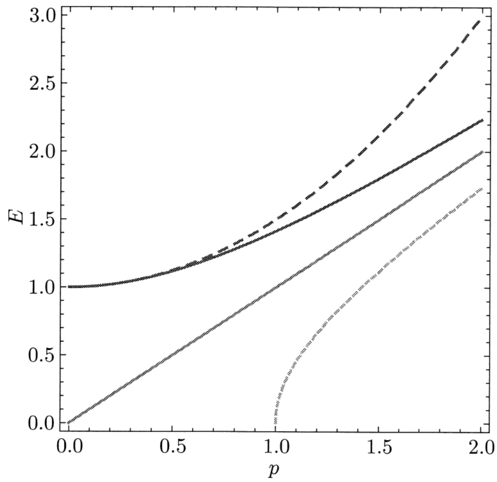


図 3　物質の場合の式 (11)（上の実線）と光の場合 $E = cp$（下の実線）との対比．粒子の古典的な場合 $E = p^2/(2m)$ を破線で書き入れた．運動量，従って速度が小さいときだけ，相対論と合う：式 (10)．光速度を常に超えて移動するタキオンの場合も点線で書き入れた．この場合 $m^2 < 0$ となる．

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right)\psi \qquad (13)$$

となる．これはシュレジンガー方程式と呼ばれ，相対論的共変性の要請は満たさないが，粒子の速度の小さいときの近似的な基礎法則である（例えば文献 2)）．

上に現れた特徴的な物理定数 $c, \hbar$ から，相対論は物体の速度が日常の速度に比べて非常に大きく光速度に近いときにニュートン力学との相違があらわになり，量子論は物質の波動性が顕著になるミクロな世界でのみ古典論との相違があらわになる...，と思われるかもしれない．しかし実際そうではないことを次に見ていこう．

3. 古典世界とのつながり

光は常に光速度で移動し，減速しないし止めることのできない実在である．一方，回転を止めることのできないコマが存在する．スピンである．実際，電子を考えると，その量子力学的広がりはコンプトン波長 $\lambda = \hbar/(m_e c)$ で与えられる．電子の角運動量 $J = \lambda m_e v = \hbar$ から速度を求めてみると，回転電子の表面の速度は $v \approx c$ となる．「はじめから光速度で動いている」のだから止まれない，と見ることもできる．さて物質の中でこのスピンが揃うと，強い磁場ができる．日常の世界にありふれた永久磁石は，ミクロ世界の止まれないスピンによってもたらされた永続する磁場である．

量子論においても，日常的なマクロ世界とのつながりがある．先ほど得られたシュレジンガー方程式 (13) を $\psi = \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{iS}$（$\rho(t,x), S(t,x)$ は実関数）として書きなおすと，$\vec{v} \equiv (\hbar/m)\vec{\nabla}S$ に対して，

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{m\vec{v}^2}{2} + V - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}}\Delta\sqrt{\rho}\right) = 0, \qquad (14)$$

$$\dot{\rho} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (15)$$

となる．式 (14) はほとんど流体の方程式（オイラー方程式）であり，$\vec{v}$ は流体の速度である．この式に $-\vec{\nabla}V$ が力として入るので，先ほどの V はポテンシャルであり，$m\vec{v}^2/2$ の運動エネルギーと合わせて全エネルギーが入ってきていることになる．式 (15) は $\rho = \psi^\dagger\psi$ という重要な正値の保存量の存在を言っている．これによって，粒子の時刻 t，場所 $\vec{x}$ における存在確率が $\rho(t,\vec{x})$ である，という解釈が可能になり，シュレジンガー方程式は確率密度の時間発展方程式と位置づけられることになる．古典的流体方程式と違うのは，そして量子力学のすべての特性は，唯一 $V_Q = -\hbar^2/\left(2m\sqrt{\rho}\right)\Delta\sqrt{\rho}$ の項の存在である．オイラー方程式の中で，圧力という意味を持つので，これは**量子圧力**とでも呼ぶべきものである．実際 V_Q は $\sqrt{\rho}$ が集中するところで大きくなり，ψ はつぶれることができなくなる．ψ の表す x, p の大雑把な広がりをそれぞれ $\Delta x, \Delta p$ と書いてみよう．するとこの効果が顕著に現れるのは，運動エネルギー項と比較して，$(\Delta x)(\Delta p) \approx \hbar$ のときである．従って，V_Q の存在は $(\Delta x)(\Delta p) \geq \hbar$ を示唆する．実際，量子論から，Δx の標準偏差と定義して，**不確定性関係**

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (16)$$

が導かれる．これを $(\Delta x)(\Delta p) = \Delta t(\Delta x/\Delta t)(\Delta p)$ と変形して，時間とエネルギーの不確定性 $(\Delta t)(\Delta E) \geq \hbar/2$ と読むこともできる．

物質構成の基本となる水素原子について考えてみよう．式 (16) から，$xp \approx \hbar/2$ として，系のエネルギーは $E = \hbar^2/\left(8m_e x^2\right) - k_0 e^2/x$ となる．これを最小化する条件で原子の半径 $r = \hbar^2/\left(k_0 e^2 m_e\right) \approx 5.3 \times 10^{-9}\,\mathrm{cm}$ と密度 $\rho = m_p/\left(4\pi r^3/3\right) \approx 2.7\,\mathrm{g/cm^3}$ が決まる．この原子を積み上げていってできる構造が我々の周りにある日常世界を作っている．さらに大きくなって，重力エネルギーと物質のエネルギーがつり合うところでバランスし，安定な構造ができる．この構造の質量と半径はおよそ，

$$M = \frac{e^3 k_0^{3/2}}{2\sqrt{2}G^{3/2}m_p^2} \approx 8.1 \times 10^{26}\,\mathrm{kg}, \tag{17}$$

$$R = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2Gk_0}e m_e m_p} \approx 1.0 \times 10^7\,\mathrm{m} \tag{18}$$

となる*4)．このような構造は**惑星**と呼ばれる．半径が $\hbar^2$ に比例していることに注目しよう．一方もっとサイズが大きくなってくると，原子が積みあがって重力を支えるのではなく，原子核融合反応を起こしてその熱で構造を支えるタイプの構造もある．陽子どうしが接近して（距離 r）その運動量の不確定性（$p \approx \hbar/r$）から，ひいてはエネルギーの不確定性（$E \approx p^2/(2m)$）がクーロン障壁（$k_0 e^2/r$）を乗り越えるぐらいになると，陽子たちは融合して発熱しヘリウムとなる．この過程は後述する量子力学特有の**トンネル効果**である．この熱で支えられる理想気体状態を考えると，この構造の質量と半径はおよそ

$$M = \frac{e^3 k_0^{3/2}}{8G^{3/2}m_e^{3/2}m_p^{1/2}} \approx 2.3 \times 10^{31}\,\mathrm{kg}, \tag{19}$$

$$R = \frac{\hbar^2}{8\sqrt{Gk_0}\,e m_e^{3/2} m_p^{1/2}} \approx 3.2 \times 10^8\,\mathrm{m} \tag{20}$$

となる*5)．このような構造は**恒星**と呼ばれる．ここでも半径が $\hbar^2$ に比例している．従って，量子論のない $\hbar \to 0$ の極限では，惑星も恒星もブラックホールになってしまうことになる．さらに，上で，$v \to c$ ととると，相対論的な存在である白色矮星や，さらに $m_e \to m_p$ とすると**中性子星**の構造が得られる．後者の質量と半径は

$$M = \frac{c^{3/2}\hbar^{3/2}}{2\sqrt{2}G^{3/2}m_p^2}, \tag{21}$$

$$R = \frac{\hbar^{3/2}}{2\sqrt{2cG}m_p^2} \tag{22}$$

となり，古典極限 $\hbar \to 0$ や $c \to \infty$ は無意味となる．つまり，あらゆる「星」が存在しなくなってしまう．実際は，惑星・恒星も白色矮星・中性子星も宇宙にはごろごろしている．「星」は量子力学的存在なのである．

この意味で，マクロ世界は決して古典的世界ではない．もはや古典論は正しくなく，相対論，量子論こそが正しい出発点である．だから，古典論を「量子化」して量子力学を導出するという方向は実が逆である．基本である**量子力学から，古典的に振る舞う変数を導出**する必要がある．

さらに，**ブラックホール**も相対論，量子論によって記述される存在である．質量 M の天体からの脱出速度がちょうど光速度 c となる半径 r は，$r = 2GM/c^2$ となる．質量 M が実際この半径内にコンパクトに詰まっていればブラックホールとなる．この半径 r はシュバルツシルト半径と呼ばれ，これ以内の距離では時間的空間的関係が逆転している．これをブラックホールが持つ時間の不確定性とすれば，この距離を光が通過する時間 $\Delta t = 2r/c$ と不確定性関係 $(\Delta t)(\Delta E) \approx \hbar$，$\Delta E \approx kT/2$ を用いて，

$$T = \frac{c^3\hbar}{8kGM} \tag{23}$$

*4) 木星は，$M \approx 1.9 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}$，$R \approx 1.4 \times 10^8\,\mathrm{m}$ である．

*5) 太陽は，$M \approx 2.0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$，$R \approx 7.0 \times 10^8\,\mathrm{m}$ である．

となる．従って，質量 M のブラックホールは，この温度の輻射を放出しながら自身は M^{-3} に比例した寿命で蒸発してしまうことになる．例えば 10^{11} kg のブラックホールはちょうど宇宙年齢のうちに蒸発する．

先ほど出てきたトンネル効果を考えてみよう．古典的には通過できない高いポテンシャル障壁 $V(\vec{x})$ を量子論では通過できてしまう．古典粒子が進入できない障壁の領域 $[0,a]$ を等しい幅 Δx の N 個の部分に分割してみよう．エネルギー E_i を持った古典的粒子がこの各障壁を通過する確率はおよそ $P_i = \mathrm{e}^{-E_i/kT}$ である．ここで粒子がジャンプするべきエネルギー差は $E_i = V_i - E$ で, V_i はその場所でのポテンシャルの大きさである．粒子がこのエネルギーを獲得したとすると，$E_i = mv^2/2$ である．不確定性関係 $(\Delta E)(\Delta t) \approx \hbar/2$ に $\Delta E \approx kT/2$, $\Delta t \approx \Delta x/v$ とすると，トンネルする確率 P は，$P = P_1 P_2 P_3 \ldots P_N = \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} p_i \Delta x/(2\hbar)\right)$ となり，結局

$$P \approx \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\int_0^a dx\sqrt{2m(V-E)}\right) \quad (24)$$

が得られる*6)．指数関数の中は，（虚数の）作用を作用単位 $\hbar$ で測った値である．従ってマクロ世界では，トンネル確率は極端に小さくなる．

式 (14) に出てきたポテンシャル量子補正 $V_Q = -\hbar^2/\left(2m\sqrt{\rho}\right)\Delta\sqrt{\rho}$ に着目しても，トンネルの様相を古典的に表現することができる．例えば，エネルギー E を持った粒子が領域 $[0,a]$ でだけ 0 でないポテンシャル V を超えていく，という典型的な場合を考えよう．3 つの領域（$x<0, 0<x<a, a<x$）に対する式 (13) の波動関数 ψ は平面波で解けて，各境界で波動関数をなめらかに接続していくと，全領域の波動関数が求められる．それを用いてポテンシャル $V-V_Q$ を計算できる (図 4)．元のポテンシャル障壁 V がいくら大きくても，V_Q がそれをほとんど相殺し，運動エネルギーは常に有限の値

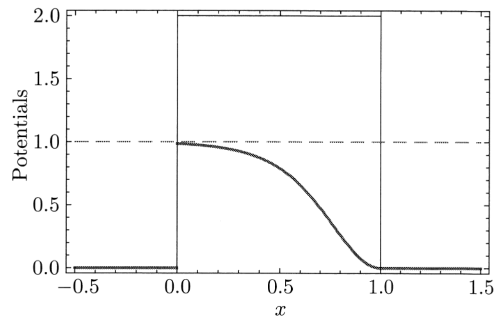


図 4　全ポテンシャル $V-V_Q$ を実線で描いた．矩形の細線はポテンシャル V．パラメター数値は，$a=1, E=1, m=1, \hbar=1, V=2$ とした．破線は E．障壁部分 $[0,a]$ でも $E > V - V_Q$ であり，古典的粒子は非常にゆっくり通過できる．通過時間の逆数が，量子力学的に計算したトンネル確率になる．

$$E - V_{\mathrm{tot}} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{4k^2\beta^2}{\left[\begin{array}{c}\left(k^2+\beta^2\right)\cosh\left(2\beta\left(a-x\right)\right)\\ +\left(\beta^2-k^2\right)\end{array}\right]^2} \quad (25)$$

となる．ここで，$k=\sqrt{2mE}/\hbar$, $\beta=\sqrt{2m\left(V_0-E\right)}/\hbar$ である．古典的粒子は非常にゆっくりした速度でポテンシャル領域を通過する．その**ポテンシャル通過時間**の逆数は，上記のトンネル確率の逆数に等しい[4)]．

4. 古典世界との決別

前節では，相対論・量子論がどのような形で古典世界とつながっていて，そしてどの部分で逸脱しているのかを見てきた．特に，相対論・量子論特有の性質がどのように現れているのかに着目してきた．理論を理解するのにこれが有効であったとすると，それは我々が古典力学的世界にすでに十分慣れ親しんできたからである．しかしひとたび，相対論・量子論の世界に十分慣れ親しんだら，古典論の常識や思想は忘れていいのかもしれない．実際，相対論を議論するのに，ローレンツ収縮だけでは説明できない実験がある．例えば，2 軸の長さの異なるマイケルソン・モーレーの実験であ

*6)　正確に計算すると，指数関数の中は 4 倍大きい．

る．また，量子論においては，エンタングル状態，ベルの不等式の破れの実験などは，あらゆる古典的な説明が失敗する．一方古典論を離れて，純粋に相対論あるいは量子論の論理の中ではすべてが整合的に説明される．**古典的な解説は不要**であり，むしろ間違いの元であったりする．物理を理解するのに唯一根拠を置くことができるのは，実験と観測である．それらの中で新しい常識が作られ古い常識は過去のものとなる．

不思議なものに出会ったときに，まずよく分かっているもので説明を試みる．そしてそれでは決して説明できない部分を抽出し，新しい説明を試みていく，というのが普通であろう．古い常識は新しい常識でどんどん変更されていくのが物理の発展だろう．

5. 結語

相対論・量子論の不思議な性質は，よく分かっている古典論の発展として本質がどこにあるかを見ていくと面白い．そしてこれが実験に裏付けられた新しい常識になったときには，その先にあるさらに不思議な謎に進んでいくことになる．今までの理論で何が分かっていて，何が説明できなかったのかを明確に分けて考えていくとき，新しく受け入れるべき理論が整理されていくのだろう．

参考文献

1) 大貫義郎著，『ポアンカレ群と波動方程式』（応用数学叢書），岩波書店 (1976/9/17).
2) P.A.M. Dirac 著，*The principles of quantum mechanics*, みすず書房；第 4 版 (1963/07).
3) 砂川重信著，『理論電磁気学』，紀伊國屋書店；第 3 版 (1999/09).
4) arXiv:quant-ph/9704008.

（もりかわ・まさひろ，お茶の水女子大学理学部）

学習・記憶する電荷の波

鹿児島　誠一

1. “因果律に反する” 電流振動

導体に電極をつけて，電圧を加えると電流が流れる．電流と電圧の比が電気伝導率で，その逆数が電気抵抗率である．一定の電圧を時間幅 w のパルスとして加えると，同じパルス幅 w の定電流パルスが生じるであろう．

ところで，1 次元性の高い電気伝導体，つまり一つの方向には電流がよく流れるが，これに直交する方向にはほとんど流れない物質では，不思議な現象が見られる．図 1 に示すように，電流値がパルス幅 w の中で振動するとともに，パルス幅 w を変えると振動の周期が変化していることがわかる．右側の図では $w = 1.8\,\mu\mathrm{s}$ のときと $2.3\,\mu\mathrm{s}$ のときを比較しており，周期の違いがよくわかる．さらに，w の値によらず，パルスの終端では電流値が振動のほぼ極大を示していることもわかる．別の見方をすれば，w を多少変えても，その中で電流は整数回の振動をしており，w をさらに増すと振動回数が 1 回増える．この現象は，伊土ら[1)] と Fleming ら[2)] によって独立に，それぞれ別種の 1 次元導体で発見されたものである．

この現象は因果律に反するように見える．つまり，この導体は電圧パルスの終端がいつ来るか知るはずもないのに，パルスの終端で電流値が極大になるように，電流振動の周期を自発的に調整している．類似の現象として「モードロッキング」が知られているが，後述のように，今の現象はそれとは少し異なる．

本稿の主題は，この現象を説明するアイデア，つまり多変数・非線形系特有と思われる「**学習・記憶効果**」のモデルを紹介することである．なお，この現象の物理は 1970 年代後半から 1980 年代後半にかけて一応の完成を見ている．ここでは，伊藤[3, 4)]，Littlewood–Coppersmith ら[5)] のアイデアを紹介する．これによって実験結果のすべてが説

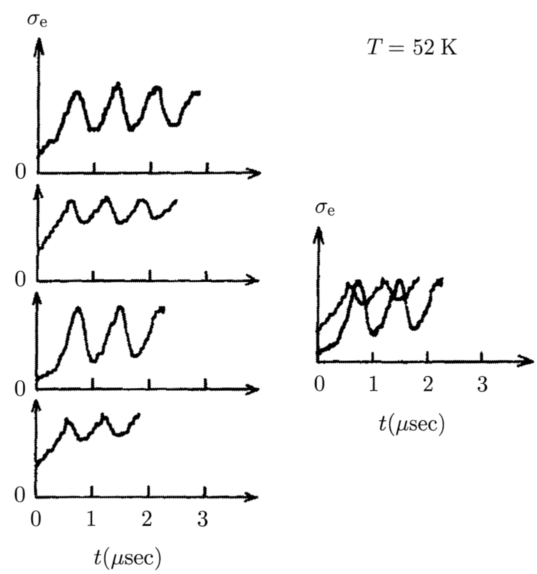


図 1　温度 52 K における $NbSe_3$ の電気伝導率．異なるパルス幅の電圧パルスを加えて測定したときの，伝導率の振動パターンの変化を示す（文献 1) より転載）．右側の図は，振動周期の変化を見やすくするために左側の図の一番下と下から 2 番目を重ねたもの．

明できたわけではないが，現象の本質は解明されたと考えられる．

ここでの電流の担い手は，普通の導体のような多数の電子のばらばらの運動の重ね合わせではない．多数の伝導電子が歩調をそろえて動く「**電荷密度波**」と呼ばれる集団運動状態であることが様々な実験と理論でわかっている[6]．高い1次元性をもつ導体は，物質固有の相転移温度で金属から絶縁体（真性半導体）に相転移する．このとき1次元系特有の現象として，電気伝導を担っていた電子は電子数密度に反比例する波長の密度波を作る．結晶格子にも同じ波長のひずみの波が生じ，両者が一体となった混成波ができる．これを電荷密度波と呼ぶ．このような状態変化が起こると，個々の電子の運動が担う普通の意味の電気伝導は生じない．ところが，電子は電荷密度波という集団状態で動いて電流を担うことができ，原理的には抵抗ゼロで電流が流れることが可能になるのである．もちろん，図2(a)に絵解きするように，現実の導体結晶では不純物や格子乱れなどによって電荷密度波が「**ピン止め**」されるので，電流は流れない．ピン止めによるポテンシャル障壁を越えるだけの電場（「**しきい電場**」以上の電場）を加えると，電荷密度波が滑り始める．

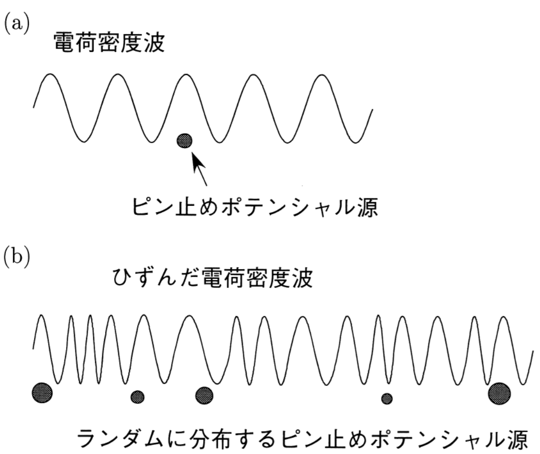


図2 不純物ポテンシャルによってピン止めされた電荷密度波のイメージ．(a) 1個の不純物によるピン止め．(b) ランダムに分布する多数の不純物によってピン止めされ，内部ひずみを持つ電荷密度波．

電荷密度波がピン止めをはずれて動くとき，定電圧パルスに対して，電流パルスの電流値がいくらか振動する．なぜなら，電場によって電荷密度波には時間的に一定の外力が働くが，電荷密度波の1波長が一つのピン止めポテンシャル障壁をのりこえる都度，電荷密度波のすべり運動は加速と減速を繰り返すからである．電荷密度波の流れは電流をもたらすから，電流には振動が生じる．電場がしきい電場よりわずかに大きいなら，滑りの平均速度は小さくてゆっくりした電流振動が見られ，電場が強くなると滑り速度が増すから，電流には高周波の振動が生じる．これらは実験で確かめられている．

ところで，初めに述べた因果律に反するように見える振動現象は，このような電荷密度波の運動を，パルス電場（あるいはパルス電流）によって起こしたときに見られる．

2. 原点からの復習：振動・波動の物理

現象の出発点は，ポテンシャル源によって捕えられた電荷密度波である．電荷密度波を $\rho = \rho_0 \cos(Qx-\phi)$ と表そう．ここで ρ は電荷密度[*1]，x は1次元方向の座標，Q は電子数密度で決まる波数（波長は $2\pi/Q$），ϕ は位相定数である．ここで，表式を $\rho = \rho_0 \cos\{Q(x-\phi/Q)\}$ と書き直せばわかるように，ϕ の変化は電荷密度波の並進を表しており，電荷密度波を剛体とみなすならば ϕ/Q がその位置座標の役割を果たすことになる．したがって，電荷密度波の運動を議論するには，位相 ϕ の時間変化を調べればよい．電荷密度波がピン止めポテンシャルの底付近で微小変化をするなら，その運動は ϕ の**単振動**で近似できる．実際には様々な原因による**減衰**が伴うから，減衰力も速度に比例するという近似で取り入れておく．以下では，単振動の復習から始めて，問題を考えて行こう．

*1) 電荷密度は平均値の周りで振幅 ρ_0 の振動をする．実験によれば，現実の物質で振動の振幅は平均値の1/10程度である．ここではその振動部分だけを表しておく．ただし，電荷密度波が動くときは，平均値部分を含む全電荷が動くと考えられている．

2.1 単振動・減衰振動・強制振動

電荷密度波を質量 M の剛体とみなそう．その位置座標が ϕ/Q であり，速度に比例する減衰力を $\gamma\dot{\phi}/Q$，ポテンシャルエネルギーを $U(\phi/Q)$，電場による外力を $F(t)$ と表すと，ϕ の運動は次の運動方程式で表される．

$$M\frac{\ddot{\phi}}{Q}+\gamma\frac{\dot{\phi}}{Q}+\nabla U\frac{\phi}{Q}=F(t). \qquad (1)$$

$\gamma=0,\ F(t)=0,\ U(\phi)\propto\phi^2$ ならば，その運動は質点の単振動である．$F(t)\propto\cos\omega t$ で ω が単振動の固有振動数に近いと，**共振（共鳴）**が起こり，$\gamma\neq 0$ ならばエネルギーの損失を伴いながら安定な振動が継続する．$F(t)$ が時間によらない定数（例えば重力）を含むと，重力場の中のバネ振り子のように，ϕ は $U(\phi)$ の極小からずれたところを中心として振動する．

2.2 非線形振動とモードロッキング

さて，ピン止めされた電荷密度波を波長の整数倍だけ平行移動しても，状態は何も変わらないはずである．これは ϕ を 2π の整数倍だけ変えても不変であることを意味するから，ポテンシャル極小の位置を $\phi=0$ として，$U(\phi/Q)\propto-\cos\phi$ と書いてよかろう．ϕ/Q が質点の位置座標に相当するから，運動は重力場の中で洗濯板のような周期ポテンシャルの上に置いた質点の運動と等価である．F の定数成分は，洗濯板を傾けることに相当する．その大きさがある限界値を超えると，質点はガタガタと洗濯板を転がり落ちる．またこの運動は，振れ角が微小とは限らない**回転振り子**の運動にも対応する．一定の F は一定のトルクに相当し，F が十分大きいと振り子はぐるぐると回転を続ける．この状態を電荷密度波でいえば，電場がしきい電場を越えると電荷密度波がピン止めから外れて並進運動が生じ，並進速度が平均値の周りで振動することになる．これが電流振動の起因である．

ここで，外力に $\cos\omega_{\mathrm{ext}}t$ のような振動成分を追加すると，「モードロッキング」と呼ばれる現象が起こる．洗濯板モデルで言えば，傾いた洗濯板を転がり落ちる質点に，さらに時間的に振動する外力を加えた場合に相当する．外力の振動成分がないときにガタガタと落ちる角振動数 ω と，転がり落ちる平均の速さ v は，板の勾配で決まるであろう．これに角振動数 ω_{ext} で振動する外力を加えると，その角振動数が ω に一致するときに共鳴的な運動がおこる．ここで，板の傾きをある範囲で変化させても，ω と v は一定に保たれることが知られている．これがモードロッキングであり，ω と v はいわば ω_{ext} に都合のよい値に引き込まれる．板の傾きをさらに増してある限界を超えると，遂に ω は $2\omega_{\mathrm{ext}}$ に v は $2v$ に飛躍し，そこでまたしばらく一定に保たれる．振り子の回転運動でも同じことが起こるはずであり，電荷密度波の並進運動による電流でも，このモードロッキング現象が実際に観測されている．

ところが本稿で問題にしている電流振動の問題では，洗濯板の傾き，つまり電場による外力を変えているのではなく，電場パルスの幅を変えている．これは，洗濯板の傾きは一定のままで，そのように傾ける時間の長さを変えることに相当する．時間の長さを変えても，転がり落ちる ω と v が変わるとは思えないが，実験で観測された結果はそうではない．板を傾け終わったときに，質点が洗濯板の凹凸をちょうど整数個だけ越え終わっているように，自発的に ω と v を調整しているように見える．これはモードロッキングでは説明しきれない．パルス列は一つの交流信号だから，パルス間隔を変えると交流振動数成分が変わる．しかし，そのような実験をしても今考えている電流振動の，因果律に反するかのような現象は変わらないので，やはりモードロッキングによる説明は困難と思われる．

3. 学習・記憶する電荷密度波

3.1 電荷密度波の学習・記憶過程の実験

伊土，Fleming らの実験では，もう一つの重要な現象が見られている[2,7]．それは図 3 に例を示す学習・記憶効果である[7]．電流値は一定に保って，まず幅約 1.5 μs の電流パルスを多数回加える

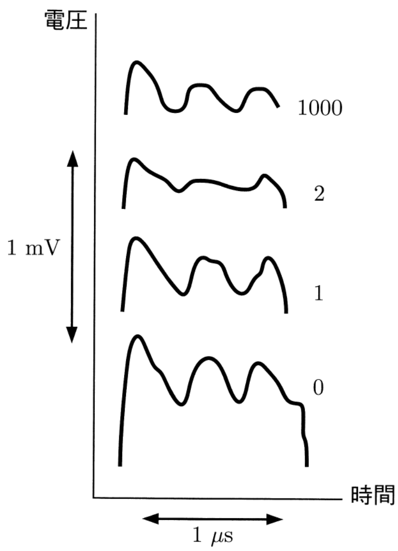


図 3 $NbSe_3$ の電気抵抗率の振動に見られる電荷密度波の学習・記憶効果．一定の大きさの電流パルスを流すときの電圧応答パルスの頭部を拡大した．4 つの波形を縦方向にずらして重ねた．(0) 1.5 μs 程度の時間幅の電流パルスを多数回加えたとき，(1) パルス幅を約 10% 狭めて，パルスを 1 個加えたとき，(2) 2 個目のパルスを加えたとき，(1000) 1000 個目のパルスを加えたとき（文献 7）の Fig.6 を参考にして要点を描き直した）．

と図 3 で 0 を付したような 3 回の振動が起こる（ここでは定電流に対する電圧を見ているので，パルス終端では電圧が最小となっている．これは定電圧パルスに対する電流応答が，パルス終端で電流最大となることに相当する）．次に幅を 10% 程度狭めたパルスをまず 1 個加えると，1 を付して示すようにそれまでと同じ周期の振動をし，しかしパルス幅が短くなったので，電圧最小に向かう途中で終了している．つまり，何も未来予測ができているわけではないことがわかる．2 個目のパルスでは，2 を付した半端な応答をする．その後の数個〜数十個のパルスでだんだん応答が収束してきて，1000 個目のパルスでは，1000 を付した整った応答に落ち着く．このとき，図で明らかなように，振動周期が最初より短くなり，幅が狭くなった電流パルスの中で，ちょうど 3 回の振動をしてパルス終端では電圧最小となっている．パルス幅を広げたときには，これと逆の現象がみられる．

このことから次のことがわかる．幅を変えたパルスを加え始めると，その後しばらくの間は応答が乱れるが，その間に電荷密度波が何かを「学習」して「記憶」する．その結果，十分な回数のパルスの後には，電荷密度波は並進速度を調整して，そのパルス幅の中で整数回の振動が起こったのち，パルス終端で電圧最小（あるいは電流最大）となるような応答をする．

なお，Fleming らの実験では，パルス終端では電流が増加する途中である．試料が伊土らとは違って $K_{0.3}MoO_3$ という組成の酸化物導体である．試料結晶の太さや結晶格子の完全性が違うと想像され，純粋な 1 次元系としては伊土らの $NbSe_3$ が理想に近いと思われる．このことは，後で述べるシミュレーションで，現象として何を重視するかに関わってくる．

3.2 連続弾性体としての電荷密度波

このような学習・記憶効果の起因を考えるには，もはや，電荷密度波を 1 個の質点（剛体）と見ていては不十分であろう．電荷密度波がゴムやこんにゃくのような**連続弾性体**とみなすことにしよう．弾性体のひずみの中に何かが記憶されると考えるのである．まず，ピン止めをする不純物が多数あり，1 次元導体の中での不純物の場所とピン止めポテンシャルの大きさがランダムに分布しているとする．こうなると電荷密度波は，図 2 (b) にイメージを示すように，ランダム分布をする多数の不純物との相互作用エネルギーを極小にするように，適当にひずんで全体を安定化するだろう．これを表現するために，電荷密度波の表式の位相 ϕ は電荷密度波の "剛体としての位置" ではなく，時刻 t で弾性体内部の場所 x での位相 $\phi(x,t)$ を表すとしよう．こうすれば，x に関する勾配 $\nabla\phi$ が弾性体としての電荷密度波の**内部ひずみ**を表すことになる．

この考え方で $\phi(x,t)$ の運動，すなわち，場所によって異なるひずみをもつ電荷密度波の運動の理論的基礎付けが，福山，Lee，Rice らによってなされた[8〜10]．不純物がランダムにあるとき，(1) 式の

ポテンシャルエネルギーは近似的に 2 つの要因の和で書ける．一つは $(\nabla\phi)^2$ に比例する電荷密度波のひずみエネルギーであり，これによる力は $\nabla^2\phi$ となって弾性波を表す波動方程式の形が見えてくる．もう一つは不純物との相互作用エネルギーであり，これをどう近似するかは考えどころである．1 個の不純物が位置 x にあるとき，その位置の電荷密度波の位相を $\phi(x)$，不純物との相互作用を最小にする位相を $\alpha(x)$ として，相互作用エネルギーは，$|\phi(x,t)-\alpha(x)|$ で決まるとしよう．位相には 2π の周期性があることを考慮して，例えば $-\cos\{\phi(x,t)-\alpha(x)\}$ と近似するのが一つの方法である．このとき (1) 式の左辺で，ポテンシャルエネルギーに起因する力の項は $\sin\{\phi(x,t)-\alpha(x)\}$ という形を持つ．

3.3 学習・記憶効果のシミュレーション

これ以上解析的に考察を進めることは困難であり，伊藤[3, 4]，および Coppersmith と Littlewood ら[5] によって数値計算によるシミュレーションで問題が調べられている．そのためには，x 座標を離散化する必要がある．i 番目不純物の位置を x_i とし $\alpha(x_i)$ を α_i と書く．ϕ の時間変化が小さい，つまり電荷密度波の滑り速度が遅いとすると，$\ddot{\phi}$ の項を無視できるから，(1) 式の運動方程式は次の形に書ける．

$$\dot{\phi}_i = E - \varepsilon_i \sin(\phi_i - \alpha_i) - \kappa_i\{(\phi_i - \phi_{i-1}) + (\phi_i - \phi_{i+1})\}. \quad (2)$$

ただし，式の形を簡単にするために係数を書き変えた．E は電場による外力，ε_i は不純物ポテンシャルとの相互作用による復元力，κ_i は電荷密度波のひずみの復元力を表している．また，不純物ポテンシャルの大きさと位置はランダムと考えられるが，シミュレーションを簡単にするためには，例えば，ε_i を i によらない定数とするか，あるいは κ_i を i によらない定数とする簡略化が用いられている．後者の簡略化は，不純物が等間隔で並ぶことに相当する．

(2) 式の運動方程式は，図 4 に示すような連成回転振り子の運動に対応することに注意しよう[11]

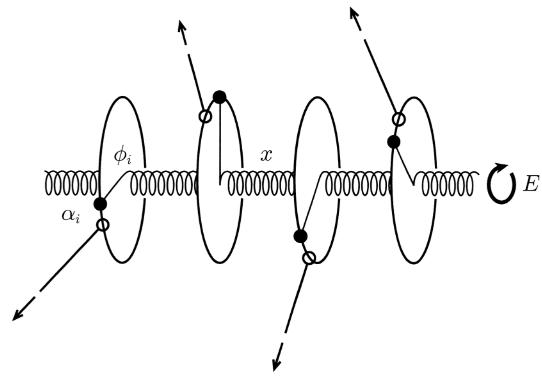


図 4　連成回転振り子のモデル．α_i は，i 番目不純物の場所においてその不純物との相互作用を最小化する電荷密度波の位相（振り子の回転角），ϕ_i は実際の位相（振り子の回転角）．α_i はその場所において回転振り子に働く重力の方向を表すと考えればよい．隣接する回転振り子の間にはねじりばねがあり，2 つの回転振り子の振れ角の差に比例する復元力が働く．すべての回転振り子には一定のトルクが加えられる[11]．

（左辺に $\ddot{\phi}$ に比例する慣性項を加えてもよい）．ϕ_i は i 番目の回転振り子の振れ角，E はすべての振り子に共通に作用するトルクを表し，κ は隣り合う振り子の軸を結ぶねじりばねのばね定数に相当する．α_i は i 番目の振り子の位置での重力の方向で，ε_i はその大きさとみなせばよい．この古典力学系を対象として，電荷密度波の学習・記憶効果を次のように表現することができる．最初（$n=0$）に，多数の振り子は乱雑な向きを向いて一つの準安定状態 $\{\phi_i^{(0)}\}$ にある．ここでしきい値以上のトルクを加えると，連成振り子の全体が回転を始める．一定の大きさのトルクを，決まった時間の長さだけ 1 回加える（$n=1$）と，連成振り子は整数とは限らないある回数だけ回転し，振り子の向きは最初とは違う準安定状態 $\{\phi_i^{(1)}\}$ になる．さらに同じトルクをもう 1 回加える（$n=2$）と，また別の準安定状態 $\{\phi_i^{(2)}\}$ になる．これを繰り返すと，やがて，連成振り子が整数回だけ回転するようになり，落ち着き先の準安定状態 $\{\phi_i^{(n)}\}$ がほとんど n によらない状態に収束する．

こう見てくると，問題の本質は次のように考え

られる．非常に多数の変数をもつ系が無数の準安定状態をもち，決まった時間だけ働く外力の作用を繰り返し受けているうちに，一つの**準安定状態**に落ち着く．その後は，同じ外力の作用の下で，その準安定状態から出発して同じ準安定状態に戻る．このことが起こるには，何らかの負のフィードバック作用があるに違いなく，その原因は相互作用の非線形性であろうと考えられる．また，準安定状態が系に記憶される必要があるが，$\{\phi_i\}$ は電荷密度波のひずみパターンに相当する．実験で用いられた電場パルスの間隔は 10 ms 程度であり，この程度の時間では，結晶格子のひずみは実験の温度域（数十 K）では容易に解消されないことはほぼ確かである．

4. おわりに

シミュレーションで実験結果のすべてを説明できたというわけではない．例えば，伊土らの実験と Fleming らの実験ではその結果に微妙な違いがあり，その違いの原因の推測はなされているが，確かめられてはいない．またこれに対応して，伊土らの実験の説明にほぼ成功した伊藤のシミュレーションと，Fleming らの実験をかなり再現できた Coppersmith と Littlewood らのシミュレーションにも相違はある．両者ともその出発点は上の (2) 式であるが，その後の近似と方法が同じではない．

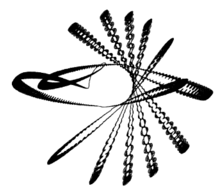
実験がなされている物質は，その電子系の運動は高い 1 次元性を持つが，原理的な 1 次元系ではない．1 次元軸に直交する方向には，多数の電荷密度波が並んでいて相互作用がある．伊土らが対象とした物質の結晶は，厚さ 1 μm 程度の細長いリボン状をしている．このリボンがまさしくメビウスの輪となった単結晶も作られており[12]，そのようなトポロジーの下での現象がどうなるかなど，着実な研究が続けられている．なお，学習・記憶効果の問題以前にも，多数のランダムポテンシャルの下での電荷密度波のひずみ状態に関する詳しい考察がなされている[13~17] ことを付記しておく．

参考文献

1) M. Ido, Y. Okajima, M. Oda: *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** (1986) 2106.
2) R.M. Fleming, L.F. Schneemeyer: *Phys. Rev.* **33** (1986) 2930.
3) H. Ito: *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989) 1968.
4) H. Ito: *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989) 1985.
5) S.N. Coppersmith, P.B. Littlewood: *Phys. Rev. B* **36** (1987) 311.
6) 参考書として，鹿児島誠一編著『低次元導体』（裳華房，2000 年）.
7) Y. Okajima, M. Ido: *Phys. Rev. B* **40** (1989) 7553.
8) H. Fukuyama: *J. Phys. Soc. Jpn.* **41** (1976) 513.
9) H. Fukuyama, P.A. Lee: *Phys. Rev. B* **17** (1978) 535.
10) P.A. Lee, T.M. Rice: *Phys. Rev. B* **19** (1979) 3970.
11) 伊藤浩之：数理科学，No.311 (1989) 57.
12) 例えば，T. Matsuura, T. Tsuneta, K. Inagaki, S. Tanda: *Phys. Rev. B* **73** (2006) 165118.
13) P.B. Littlewood: *Phys. Rev. B* **33** (1986) 6694.
14) C. Tang, K. Wiesenfeld, P. Bak, S. Coppersmith, P. Littlewood: *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 1161.
15) H. Matsukawa, H. Tamayama: *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** (1987) 1507.
16) H. Matsukawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** (1987) 1522.
17) H. Matsukawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **57** (1988) 3463.

（かごしま・せいいち，明治大学理工学部，東京大学名誉教授）

DNAはなぜヒトを発明したか



伏見　譲

1. ヒトゲノム読破に至る物理学的発想

江戸時代後期に西洋のPhysicsが入ってきたとき，先人はこれを窮理学と正しく訳した．物事の理を窮める（＝究める）学問の意である．「物」理学の「物」は，物質を指すのではなく，物事を指すことをまず注意したい．一方，高校の理科では物理学と生物学は最も遠い位置に並立しているし，前世紀後半までは，どの大学の理学部でも物理学科と生物学科は最も遠い位置に並立していた．しかし，生命現象も物事であるから，その理を究めるのは，上の定義によれば物理学の役割である．実際，学問の歴史もそのように進んできた面がある．

あまり知られていないが，遺伝の法則を発見したメンデルは，修道僧であると同時に実業高校の物理学の教師であった．修道院から派遣されたウィーン大学では（ドップラー効果の）ドップラーから物理学と統計数学を学んだ．彼は遺伝学の研究以外にも気象学や天文学も研究している．彼の大発見が当時の権威ある生物学者から無視され，35年もの間埋もれてしまったのは，その研究が定量的実験データを統計数学で処理するという（物理学では当り前の）手法で行われたために，定性的観察結果をありのままに記載するという研究法を取っていた当時の権威者が理解できなかったため，といわれている．メンデル[1] がエンドウマメを実験材料に慎重に選んで遺伝学の定量化を目指す研究を発想したのは，まさにこの従前の研究手法への批判であったのだが．

重要なもう一つの例に進もう．2003年は人類史上でもエポックメーキングな年であった．ヒトの遺伝的設計図（**ゲノム情報**；ゲノムDNAの塩基配列）をすべて読み取るというヒトゲノム計画が完了した年である．ヒトゲノム計画に至る学問的突破口が開かれたのは，そのちょうど50年前，英国ケンブリッジのキャベンディッシュ研究所において，ワトソンとクリックによってDNA分子の2重らせん構造が発見され，遺伝現象の分子的基盤が解明されたときである．クリックはX線解析を専門とする物理学者で，ワトソンは米国で**ファージ**遺伝学を学んだ若者であった．ファージ遺伝学とは，ドイツの若き理論物理学者であったデルブリュックが米国で創始した学問である．大腸菌のウイルス（＝ファージ）の遺伝現象の解明を通して，生命現象を支配する新しい物理法則を発見し，量子力学に匹敵する新物理学分野を建設しようという壮大な研究計画の第一段階であった[2]．若き理論物理学者のこの面白い発想は，残念ながら（あるいは当然ながら），ワトソン–クリックの大発見などによって，潰されていく結果となった．遺伝の分子機構は量子力学を始めとする従来の物理法則に支配されていることが明らかになったわけである．しかし，デルブリュックは結果として，**分子生物学**という，生物学諸分野を束ねることのできる新しい確固とした学問の建設を指導したことになった．これをデルブリュックの「成功した失

敗」という．

ヒトゲノム計画自体も，その先導者・和田昭允は生物物理学者で，当時その面白い発想を支持した日本の分子生物学者はごく少数だった．物理学にとっては当り前だが生物学にとっては新奇な（と思われた）計測戦略が理解されなかったようである．ロボットで自動的にDNA配列決定実験操作を行い，ゲノム情報を主観的価値観なしに**網羅的**に読み取るという発想である[3]．当時自ら手を動かして遺伝子のDNA塩基配列を決定していた分子生物学者は，ヒトゲノムの95%程度はジャンクであると認識し，網羅的に読むのは研究費の95%をドブに捨てるようなものであって，選択と集中が重要であり，自分が面白いと感ずる遺伝子領域のみをピンポイントで配列決定するのが優れた実験研究者であると考えていたようだ．しかし，全体を読まなければ部分の本当の役割はわからない．物理学的研究戦略への無理解との闘いという意味では和田はいわばメンデルの立場を繰り返したことになる．

しかし，生物物理学は既に同種の闘いで勝利を収めていたのである．蛋白質分子がどういう立体構造をとっているかの研究は1957年に至るまで，生化学的手法による群盲象を撫でるようなものであった．生化学者が面白いと考えた活性部位の局所構造を中心に，化学修飾などのデータを基にいろいろ推測されていた．1957年，X線結晶解析によって初めてミオグロビン分子の立体構造の（あまり面白いとは思えない部分も含めた）「全体が目に見えた」ときの衝撃は大きかった．結晶中の蛋白質の構造は生細胞中の構造と同じとは限らない，スルメを研究してもイカはわからない，と批判していた生物学者もしばし沈黙した．

2. 大腸菌で正しいことはゾウでも正しい

ここで，「面白い発想」を批判的に検討するために，デルブリュックに戻ろう．彼が生命現象を支配する新規物理法則を発見するための研究対象として遺伝を選んだのは，自己増殖現象が生命の最も普遍的な過程であると考えたからであろう．これは誰もが納得する（という意味で陳腐な）発想である．しかし実験材料に（それまでほとんど誰も見向きもしなかった）ファージを選んだ理由が興味深い．デルブリュックの指導するファージ研究グループの掲げたスローガン「大腸菌で正しいことはゾウでも正しい.」がその理由である．

これは伝統的生物学者の個別性・多様性が生命の特徴であるとするメンタリティと相容れない発想である．同じ生物でも大腸菌とゾウ（本当はショウジョウバエないしヒトと比較したい）とが非常に違うことを強調するのが大部分の生物学者の立場である．その違いを利用して，病原菌は殺すがヒトには無害な医薬品を開発してきた薬学や医学の立場でもある．実はデルブリュックはロックフェラー財団の資金を得て，遺伝学の泰斗モーガン教授の研究室に留学しに米国に渡ったのであるが，モーガンの遺伝学実験材料は有名なショウジョウバエであった．ショウジョウバエを見れば見るほど，自分の研究目的に不必要なほど複雑なことにデルブリュックは悩んだ．幸運にも同じ建物で大腸菌ファージを細々と研究している研究者に会うことができ，複雑怪奇なショウジョウバエから，（量子論史の水素原子に相当する）単純なファージに転向できたのである．純粋研究はcuriosity-driven（面白い），応用研究はmission-oriented（社会の役に立つ）の場合が多いが，ファージの遺伝現象が社会の役に立つとはとても言えないし，ショウジョウバエの遺伝現象より面白いとも言えないだろう．ファージの遺伝は，面白い発想を実現するための最適手段として選ばれた，別に面白くもない現象であった（図1，図2）．

このように，現象の面白さは，発想の面白さとは別物である．生き物を見ると，驚愕するような面白い挙動をするものにしばしば出合うし，実にうまくできていると感心することも多い．また非常に美しい形態に出合うことも度々だ．面白い現象という点では，生命現象は物理現象より遙かに多様で豊富だといってよい．生物学の存在理由の一つがここにあるのだろう．一見，物理法則に反

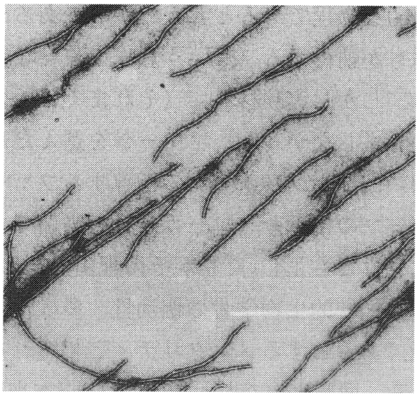


図 1　大腸菌を宿主とするウイルス：繊維状ファージ fd の電子顕微鏡写真．白いバーは 1 μm を表す．野生型 fd ファージは直径 8.5 nm，長さ 890 nm の繊維状だが，この写真のは遺伝子操作で外来遺伝子を組換えたファージで 1.68 倍の長さになっている．これは図 3 の進化リアクターで 30 時間程度で進化し，**進化分子工学**の初めての実験材料となった[7]．野生型 fd ファージのゲノムは 6408 塩基の環状 1 本鎖 DNA で 10 個の遺伝子を持つ．この繊維は，ゲノム DNA の周りに 5 種合計約 2700 個の蛋白質が覆った構造をしており，分子構造式が書き下せる高分子集合体である．しかしこの（進化した）物質は自己触媒的に自己複製し，進化する生き物である．現在でも fd ファージは進化分子工学の定番の実験材料で，創薬をはじめ広範囲に使われている．なお，デルブリュックが用いた T 系ファージは遙かに大きく複雑なファージでアポロ月面着陸船のような形をしている．

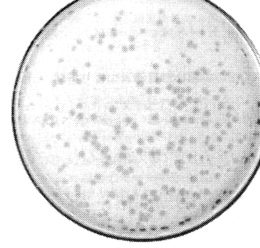


図 2　ファージ遺伝学の基本実験操作：プラク法．多量の大腸菌とファージ粒子数百個を寒天培地シャーレにまく．一夜保温すると，シャーレ表面は増殖した大腸菌の芝生で真っ白に濁るが，ファージ 1 匹が多数世代の子孫を生んで大腸菌を食べたところは黒い斑点になる．従って，この斑点（プラク）の数は，当初存在した生きたファージの数を表す．また，斑点の形状が，各突然変異体の増殖特性を表す．ゾウで同じ個数の遺伝学実験をするとしたら途方に暮れるだろう．時代を切り拓く研究は優れた発想に基づくものであって，必ずしもハイテクを必要としないことの典型例である．

しているように見える現象にもよく出合う．身近な例では，重い荷物を持って立っていると疲れる．変位はゼロなので，仕事はしていないからエネルギー消費はゼロのはずなのに．

ここにおいて，生命現象は従来の物理法則の適用範囲外の現象だとして，「生気論」「生命力」などに助けを求める人が出てくる．現在にも名を残している有名な例に有機化合物がある．これらは有機体（＝生物）の生命力によってしか合成できないとされていたからこの名称が付けられた．ようやく 1828 年にヴェーラーが尿素を無機物から合成することに成功し，従来の生命力ドグマを覆したことで，有機合成化学が始まった．有機化学が生化学から分かれて，物質科学としての別の発展を始めたわけである．デルブリュックの研究目的（生命現象を支配する新しい物理法則の発見．実はこれは師であるニールス・ボーアの発想である．）を面白い発想と感ずるのは，量子力学の成功の後の発展方向として，物理学発展史の観点に立つ人の場合で，生物学発展史の観点に立つと，むしろ，既に先進的生物学者が捨て去った生命力・生気論を物理学的根拠を与えて復活させようとする暴挙に見えたことだろう．実際，デルブリュックの「成功した失敗」の失敗の方は後者の暴挙であるとする批判が当たっていたことになる．

一方，デルブリュックの研究手法の面白い発想は大成功であった．「大腸菌で正しいことはゾウでも正しい」ことは，まず，遺伝コード表の共通性で確認され，無数の遺伝子工学の成功で何回も承認され，ヒトゲノム計画がヒト遺伝学と大腸菌遺伝学との共通性を利用して大腸菌を用いて遂行されたことにより最終的に納得されたことになる．ただし，両者の遺伝の分子機構は本質的に同じだが，相違する点も多々あるわけである．個別性・多様性を重視する生物学者や，特に医療応用を重視す

る研究者が，マイナーな相違点のほうを強調することになるのはやむを得ない．

3. 動的平衡？

上記のボーアの発想は，量子力学建設における**相補性**原理の成功体験に依拠している．光の波動性と粒子性との相補性（矛盾）の意味を解明することを通して，新しい物理学ができたように，生命現象の中にそのような相補性を示すものを見出せば，新しい生命の物理が建設できるだろうとデルブリュックらを煽動したのであった．「成功した失敗」の後の結果論から言えば，ボーア–デルブリュックの期待した相補性とは全く別の相補性が生命現象にはある．分子生物学が見出した「DNA支配の**機械論**的生命観」と，プリゴジン[4)]の見出した「**散逸構造**としての**生成論**的生命観」の相補性である．DNA分子上のゲノム情報（複雑な秩序）の存在を認めれば，生命現象の示す（複雑な）秩序は，秩序から秩序が生ずる機械論的決定論として理解できるということを分子生物学は示してきた．しかしながら，ゲノム情報が如何にして生じたかの問題，すなわち，生命の起源と進化の問題を提出したときに，この機械論的生命観は破綻する．

ここで助け船を出すのが無秩序から秩序が生ずる条件を例示した散逸構造の概念である．**平衡から遠く離れた非平衡**開放系に特殊な分子系（例：自己触媒系）があれば，エントロピー増大（エネルギーの散逸）を伴いながら，動的な秩序構造が生成してくることがある．熱平衡状態で安定に存在する「平衡構造」に対比して，これを「散逸構造」と呼ぶ．例えば，ロウソクの炎の形は散逸構造である．溶けたロウが空気で酸化され二酸化炭素と水と熱になって出ていくという物質とエネルギーの流れの中で自発的に形成される（自己組織化）構造である．しかも，これをナイフで切っても短時間のうちに自己修復し，エサであるロウがなくなるまで生き続ける恒常的構造である．生物個体も，地球生態圏も，この意味で散逸構造である．ロウソクの炎に物質的自己同一性がないように，我々も物質的自己同一性はない．今日のYY君は昨年のYY君と同一人物だが，彼を構成している原子分子はほとんど別物になっている．彼のゲノムDNAの原子も別物になっている．ゲノムDNAは自然放射線などにより絶えず損傷を受けるので，絶えず修復する機構を我々は持っており，そのたび毎にDNA分子の原子が入れ替わるのである．生物が物質とエネルギーの流れの中でのみ存続していること，平衡から遠く離れた非平衡状態を維持する作業を生物学用語では代謝という．YY君の自己同一性は，物質ではなく情報にある．

上述の重い荷物を持つと変位ゼロでも疲れる理由がこれで概念的にわかる．死後硬直した筋肉が荷物を持っているのならエネルギー消費ゼロだが，生きている筋肉の場合は平衡から遠く離れた非平衡状態で形を維持（マクロには変位ゼロ）しており，当然，エネルギーを消費し続けているのである．現在，筋収縮の生物物理学はこの分子機構解明の最終段階に到達しそうな勢いにある．

福岡伸一氏[5)]はこのような生物の特徴を「動的平衡」という用語で表現し，これが世の中に広まっているようだ．しかし，物理化学では別の意味にこの用語を用いている．室温における化学平衡は，ミクロに見ると，分子が正反応と逆反応を絶えず行っている動的状態であり，マクロに見ても平衡点の周りでわずかだが揺らいでいる．これを物理化学では動的平衡にあるという．しかし，生命らしさはこの動的平衡では表現できない．

4. 原始生命体で正しいことはゾウでも正しい

デルブリュックのスローガンが正しい理由は，地球上の生物種がすべて単一の進化系統に属すると考えれば納得できる．読みとられた多数のゲノム情報を比較してみると，この考えの信憑性がますます増している．

筆者らはデルブリュックのスローガンに刺激を受け，それを拡張した本節タイトルのスローガンを掲げた研究をしてきた[6,7)]．デルブリュックの場

合の「正しいこと」は遺伝の分子機構であるが，筆者らの場合は，進化の分子機構である．原始生命体とは，「物質の進化」の段階から「生命の進化」と呼べる「格段に**進化能**の高い」段階に移った時点の分子系に他ならない．従って，原始生命体には進化の分子機構のエッセンスがゾウや大腸菌より色濃く含まれているはずだからである．さらに面白いことは，「生命とは何か」という問は生命の起源の問題と表裏一体であるから，「生物とは，無生物物質系よりも格段に進化能の高い分子系である」という仮説が設定できる点である．残念ながら原始生命体は入手できないので，解析的方法で進化能の実体解明を行ってこの仮説を検証することはできない．そこで，**合成的方法**を採用する．すなわち，高い進化能を持った分子系を実際に作ってみるアプローチである．すると，共重合高分子が自動的に高速進化する十分条件がわかった．進化を駆動するものは，まさに上述のDNA支配の機械論的生命観と散逸構造としての生成論的生命観との相補性であった．

すなわち，平衡から遠く離れた非平衡開放系に，自己触媒系（＝自己増殖系）を置けば，ダーウィンの言う**自然淘汰**が起こる．具体例を挙げると，流通式反応器に自己触媒的複製反応を行う塩基配列の異なる多数種類の核酸を投入すれば，核酸分子間に生存競争が起こり，最速の複製反応速度定数をもつ塩基配列の核酸分子種が流通式反応器に残り，それ以外は流れ去る．最適者の生存である．これにより，最初の遺伝情報が決定する（図3）．しかし，複製反応はミスコピーを伴うから，新たな塩基配列が次々に生じ，それらも生存競争に参加する．場合によっては生存者が入れ替わる．これは**ダーウィン進化**と同じ現象である．

このような実験を初めて行ったのは，シュピーゲルマンら[8]である．京都で単離された$Q\beta$ファージのRNA複製酵素をエネルギー触媒として自己触媒（エントロピー触媒）的RNA複製反応を行わせると試験管内でRNAが半日のうちにダーウィン進化することを示した．アイゲン[9]はこの実験系を理論的に精査し（1971年），最適者の生存は

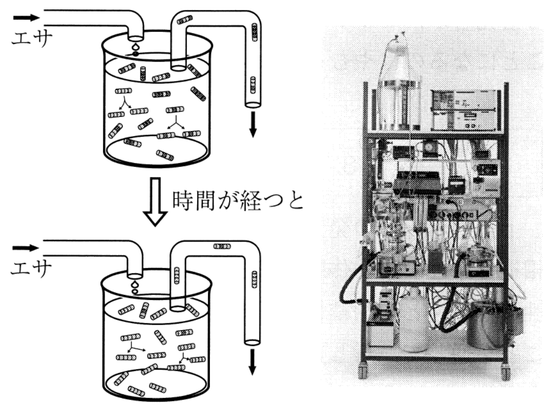


図3　進化リアクター．ダーウィン進化論における自然淘汰と同じ現象を示し，DNA/RNA上に環境に適応した遺伝情報を，結果として書き込む．左は原理図．右は埼玉大学で1982年に開発されたセルスタットという進化リアクターのドイツ版2号機．ドイツ博物館ボン新館収納．

突然変異率ゼロの理想条件で実現し，それがゼロでないときは，**擬種**と称する突然変異体の分布が生き残ることを示した．場合によっては最適者が絶滅することすらある．ダーウィンの自然淘汰の原理が遺伝情報を創出するのだが，そのダーウィン的表現法は修正を要する．なお，アイゲンの擬種の理論は2次元イジング模型と数学的に同じであることがわかっている．その後40年，進化分子工学は大きく発展し，RNA複製酵素機能を持つ人工RNAなど，RNA分子のもつ潜在能力が多様に開花した．こうして生命の起源にはRNAだけからなる生命世界があったとする「RNAワールド仮説」の信憑性が増してきている．RNA分子が，自然淘汰の助けを借りて，その分子機能を自分の塩基配列にエンコードできる物性（**分子コーディング能**）を持っていることが，そもそもの始まりであった（図4）．

筆者らは，RNAワールドに蛋白質とDNAが逐次参入し，現在の生命分子系と同じ枠組みの分子系が高速進化する機構も研究してきた．概念的に言えることは，蛋白質やDNAの参入は，生命分子系の**進化能の進化**をもたらしたということである．生命の起源におけるこのような原始的分子情報システムに始まり，その分子系が必然的に持つ

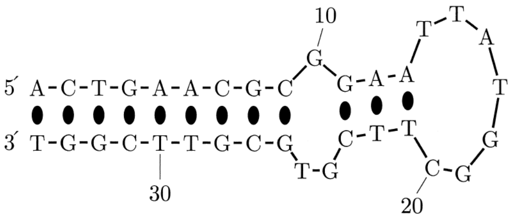


図 4　分子コーディングの例．図は，進化工学的に創出されたNiイオン特異的結合性一本鎖DNAの塩基配列と可能な2次構造を表す．この立体構造の分子表面形状がNiイオンと鍵と鍵穴の関係にあり，Niイオンだけを強く結合するという分子機能を持つ．この分子機能は塩基配列情報にエンコードされていることになる．すなわち，この塩基配列を記憶・伝達することによって，立体構造を記憶・伝達するより遙かに容易に，この分子機能を記憶・伝達できる．この分子コーディング能が，核酸に進化能の飛躍的増大をもたらす．

進化能をさらに進化させ続けることによって，ヒトのようなロバストな情報システムができあがってきたと考えられる（図5）．実際，40億年間進化し，生き延びてきたものは，生命分子系の物質ではなく，その情報ネットワークなのである．

シュピーゲルマンがアポロ宇宙船成功（1969年）直後の総説[10]に書いた次の警句はこの生命観を端的に表現している（ここでは，RNAをDNAと同一視している）．

「細胞は，DNAが複製しやすいようにDNAによって発明され，動物は，DNAが地球上のどこでも複製できることを試すためにDNAによって発明された．今や明らかになったように，ヒトは，DNAが宇宙でも複製できることを試すためにDNAによって発明された.」

ヒトゲノム読破や進化分子工学が発展した今日では，別の理由も考えられる．ヒトはDNAの自己言及を実現し，進化能を質的に進化させるためにDNAによって発明された．

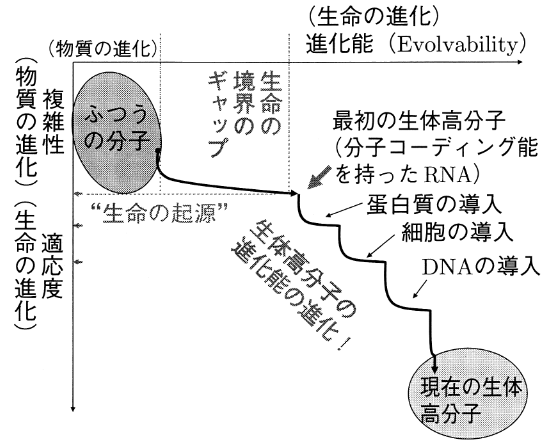


図 5　生物は分子のレベルで既に生き物らしい．なぜなら，現在の生体高分子は進化の産物で，ランダムに合成したヘテロ高分子の素材としての平均的物性とはかけ離れた極めて偏差値の高い高機能な高分子である．それは生物物理学では分子機械と呼ばれ，ナノテクノロジーの用語を使えばメタマテリアルでもある．蛋白質は同じポリペプチドという素材でできながら，サブナノスケール立体構造の違いで驚くべきほど多様で高機能な物性を持つに至った．しかし生体高分子ははじめから進化し易いという特別の物性（進化能）をもつ特殊な高分子であった．

参考文献

1) メンデル『雑種植物の研究』，岩波文庫，小泉丹訳，1928年．
2) 20世紀の物理学編集委員会編『20世紀の物理学 第3巻』，丸善，1999年，第25章　生物物理，601–627頁．
3) 和田昭允『物理学は越境する—ゲノムへの道—』，岩波書店，2005年
4) プリゴジン，スタンジェール『混沌からの秩序』，みすず書房，伏見康治，伏見譲，松枝秀明共訳，1987年．
5) 福岡伸一『生物と無生物の間』，講談社現代新書，2007年．
6) 伏見譲『DNAと遺伝情報の物理』，岩波書店，2005年．
7) 伏見譲，生物物理 **50**, 110–111 (2010).
8) D.R. Mills, R.L. Peterson, S. Spiegelman. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **58**, 217–224 (1967).
9) M. Eigen, *Steps towards Life*. Qxford Univ. Press, translated from German by P. Woolley, 1992.
10) S. Spiegelman, *Q. Rev. Biophys.* **4**, 213–253 (1971).

（ふしみ・ゆずる，埼玉大学総合研究機構）

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-88：for Senior & Graduate Courses）

演習形式で学ぶ
リー群・リー環

示野　信一　著

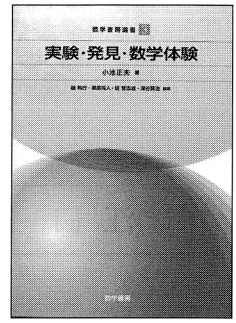
本体 2381 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

大学理工系において，学部の課程で習うことは少ないが，大学院では常識として必要となってくる斯学を，例題，演習問題を通して自習できる得難い一冊．行列の作る群やリー環の実例を豊富に盛り込みながら，リー理論，カルタン・ワイル理論といった斯学の基礎を位相や多様体などの概念も用いて数学的にきちんと解説．

サイエンス社

実験・発見・数学体験

小池正夫著，A5 判，240 頁，本体 2400 円，数学書房



「数学は研究にお金がかからなくて良いですね！」これは，数学の研究者が他の分野の研究者，あるいは一般の方からもよくかけられる言葉の一つである．一昔前は，大学の理工学部のような組織においても，物理学や化学，さらには機械工学，電気工学など，実験系の学問と呼ばれるものが大多数を占める中で，数学はいわゆる純粋理論系学問であると考えられていた．例えば高額な実験道具も，入手困難な検査用試薬の購入も必要なく，少し古くなった本を片手に，紙と鉛筆だけで，ロマンあふれる大理論の構築を夢想している… これがいわゆる数学者の定着したイメージであるのかもしれない．確かにこのような数学者は少なからず存在する．しかし数学者の多くは，夢を思い描く前に，常に「計算」をしているのである．だからと言って，スーパーへ買い物に行ったときに，買った商品の金額の合計を瞬時に計算できる数学者が多いわけではない．いわゆる数学者のする計算は，その計算から得られた事実をしっかりとした理論として形づくる，すなわち理論的な定式化をするために行うものである．つまり計算をすることは，いかに調和のとれた世界が，その背後に広がっているのかを見極めるための「実験」をしているとも言えるのである．

本書のタイトルは『実験・発見・数学体験』であり，まさに上で述べた数学者の日常の研究の姿勢を体験してみようという著者の意図が感じられる．著者の小池氏は，整数論という数学の一分野において，第一線で活躍している数学者の一人である．現代の整数論においては，個々の整数の性質を調べることにとどまらず，整数を含む様々な数の世界の構造を調べることを目的として，いろいろな道具を使った多角的な研究が続けられている．その過程において，実験的な計算はとても大切であり，著者がそのことを身を持って感じていることは疑いない．実際，本書のその多くの部分において，整数論における，その美しさが垣間見える様々なテーマが取り上げられている．題材の中には，その一般論を理解するのがなかなか困難であるようなものも含まれているが，その世界を知るために，まずは身近な計算を通して，その世界の一部分を具体的に捉え，さらに少しでもその全体像をつかもうとするための試みが諸処に顔を出している．読者の進むべき道順としては

1. データを収集する．
2. 規則性，関係，パターンを探す．
3. 推測を数学の言葉で表現する．
4. さらなるデータで推測を検証して，予想を立てる．
5. 予想を証明する．

これが著者の言う「実験数学のプログラム」である．本書ではこの題材として，例えば方程式の解法，それから得られる正 n 角形の作図可能性，剰余法と呼ばれる，整数論における基本的な計算法，それにより得られるデータから推測できる素数の規則性とそれに関する予想，さらにその検証を通して初めて見えてくる「群」と呼ばれる抽象的な世界，フィボナッチ数，チェビチェフ多項式など魅力的な道具が予想解決への道筋をサポートする．数学好きの読者であれば，わくわくしてページをめくること請け合いである．著者自身も序文の中で述べているが，本書を読むときには，鉛筆と計算用紙をそばにおいて，こまめに手を動かしながら読み進めることを強く推奨したい．

本書は，気概のある高校生，将来教員を目指す大学生のみならず，数学好きの多くの方々に手に取ってもらいたい一冊である．本書を読む者それぞれが，紙と鉛筆を片手に，自身の実験的な計算を通して得られた素敵な発見に心を躍らせてほしい．

津 村 博 文（首都大学東京大学院理工学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

江口　徹　　　　1982年6月号

30年ほど前に「ゲージ理論」の特集に書かせていただいた記事「格子ゲージ理論の進展」はCreutzによる格子ゲージ理論のシミュレーションの重要な結果[1)]が発表された直後にこれを紹介したものである．Creutzは格子理論が弱結合領域において繰り込み群で予言されるスケーリング則に従い，またWilson loop振幅が面積則を持つことを示して，QCDにおいてクォークの閉じ込めが実現されることを強く示唆する結果を得た．

この仕事以降，クォークの閉じ込めに関するQCDの研究は格子ゲージ理論を用いるものが主流となって今日に至っている．格子ゲージ理論の結果は数値計算にすぎず証明ではないが，多くの研究者によって閉じ込めの問題を実質上解決したとみなされている．

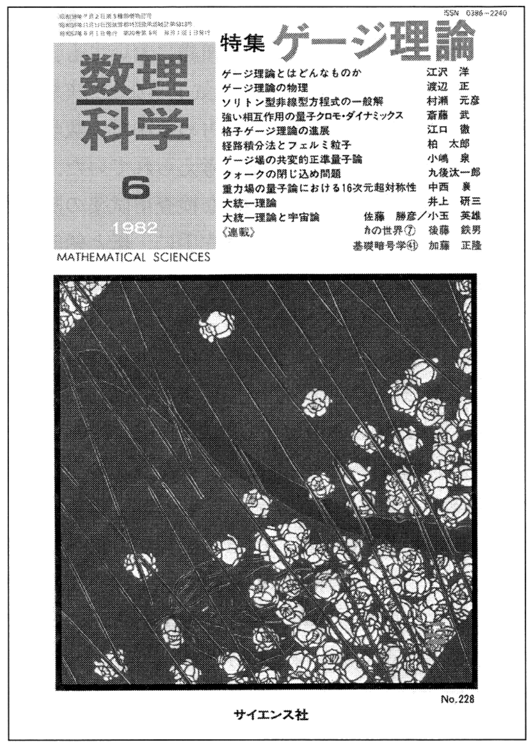
一方，QCDにフェルミオンを加えて超対称性を持つようにしたゲージ理論に関しては，十数年前に理論の双対性を用いる新しい手法が導入されその力学の理解が著しく進んだ．特に，2種類の超対称性を持つ4次元の非可換ゲージ理論に関しては，その低エネルギー有効理論を厳密に決定する手法が開発され[2)]，ゲージ理論の強結合領域での振る舞いが初めて明らかにされた．強結合領域では，理論に現れるソリトンであるモノポールの場が主要な役割を果たす．

超対称ゲージ理論の厳密解の研究には，最近になってさらに局所化（localization）と呼ばれる手法を用いることによって大きな進展があり，理論の分配関数を行列積分の形に表すことができるようになってきた[3)]．

こうした，超対称ゲージ理論における解析的な取扱いの進展は，QCDにおいても閉じ込めの問題に解析的な手法が使えないか，新たな希望の光を投げかけているようである．

超対称ゲージ理論を行列積分で表す手法は，我々が以前に考えたLarge N reduction（ゲージ対称性が大きな極限のQCDを行列積分で表す）[4)]を思い起こさせる．

Large N極限でQCDが最も簡単になることはよく



知られておりQCDが解析的に解けるとすればこの場合に限られるであろう．QCDを解くことは我々の世代の研究者の青春の夢であった．次の30年を待たずQCDは解けるだろうか？

参考文献

1) M. Creutz, *Phys. Rev.* **D 21**, 2303 (1980).
2) N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B431**, 484 (1994).
3) N. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 831 (2004).
4) T. Eguchi and H. Kawai, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1063 (1982).

（えぐち・とおる，立教大学理学部）

臨時別冊・数理科学

現象から方程式を創り出す

本体 2095 円　　送料 290 円　　　表示価格は税抜きです

I.	**序論**	
	巻頭言 現象と立式	増田　久弥
II.	**力学・電磁気学と方程式**	
	解析力学における方程式と発想	大貫　義郎
	振り子の運動 振動の方程式を創る	佐藤　光
	アインシュタイン方程式 相対論と重力	佐藤　文隆
	石鹸膜の形 極小曲面の方程式	小磯　憲史
	ファインマンによるマクスウェル方程式の「証明」	十河　清
III.	**流れの物理と方程式**	
	KdV 方程式	高橋　大輔
	渦度・バーガース方程式	神部　勉
	ナヴィエ–ストークス方程式の導き方	岡本　久
IV.	**熱・統計力学と方程式**	
	ブラウン運動，ゆらぎおよび秩序生成 確率的方程式	鈴木　増雄
	ボルツマン方程式 ミクロとマクロをつなぐ	鵜飼　正二
	プラズマ現象とブラソフ方程式 遠距離相互作用し合う粒子群の熱力学的非平衡集団現象を記述する	高部　英明
V.	**量子物理学と方程式**	
	シュレディンガー方程式	阿部　龍蔵
	ハイゼンベルク方程式・ディラック方程式	仲　滋文
	ギンツブルグ・ランダウ方程式と超伝導現象	森田　善久
	逆問題	堤　正義
VI.	**自然，社会の現象と方程式**	
	砂漠化問題のバスタブモデル	西浦　廉政 寺本　敬
	ケルマック・マッケンドリック方程式 感染症流行の個体群ダイナミクス	稲葉　寿
	パターン形成の方程式	高木　泉
	ブラック・ショールズ方程式	石村　直之

サイエンス社

久保亮五先生に学び創る感動

鈴 木 増 雄

1. はじめに

線形応答の久保理論が発表されて間もなくの時期に，学部の熱力学・統計力学の講義で，久保先生が，一つ一つじっくりと考えながら，その場で紡ぎ出すように語られる様子に強烈な印象を受けた．久保先生が不可逆過程の一般論を樹立されたという噂は当時の学部生にも伝わっていたこともあり，講義の内容もさることながら，論理の進め方や考え方に強く惹かれていった記憶が鮮明に残っている．ここでは，あまりにもよく知られた久保の業績を網羅的に紹介するのではなく，久保の研究から我々が何を学び，それを久保やプリゴジンという巨人の肩に乗っていかに発展させて来たかを主に解説したい（業績に関係するときには，「久保」という歴史的人物として扱うことにする）．そもそも，熱力学・統計力学は古典物理学でも量子物理学でもその対象に依らず適用できるという一般性・普遍性があるために，それはアインシュタインを初め多くの物理学者を魅了してきた．

2. 統計力学の解析的方法——転送行列法

1943 年弱冠 23 才で久保は統計力学の画期的な手法である転送行列法をクラマース–ワニアとは独立に提唱し，1 次元系では相転移は起こらず，2 次元以上では相転移が起こり得ることを論じた[1]．これは，考えている古典的な系を無限の部分格子に分け，それらの相互の関係を漸化式で捉え，それを行列で表現し，その固有値から，系全体の統計力学的性質（状態和や自由エネルギー）を求めるものである．現代風に言えば，これは半無限格子の境目の統計分布で記述される「情報」が部分ボルツマン因子で結ばれている隣りの部分格子列にいかに伝達されるかを記述するものであり，その意味で（情報の）「転送行列」なのである（通常の教科書では，クラマース–ワニアにしたがって，これは，状態和 Z_N を行列 $\mathscr{T}$ の N 個の積（N は部分格子列の数）のトレース，すなわち $Z_N = \mathrm{Tr}\,\mathscr{T}^N$ で表現するための数学的便法として導入されている）．久保は半無限の部分格子について境目の自由度のみを指定して他を消去した部分状態和に関する漸化式を考察しているので，今から思えば，これは「一種の繰り込み」になっている．1935 年のベーテの有効場近似の理論も，その意味では，「繰り込み」の草分けであると言ってもよい．久保とベーテの違いは，同じ操作の繰り返しになっているかどうかである．久保では，「繰り込み群」（微小 $1/N$ 繰り込み）になっていると見ることができる（ただし，1 次元イジング模型では，ベーテ近似を行うクラスターの大きさを 3 個にしても一般の

$2n+1$ 個にしても有効場は同じになり厳密解を与えるので，1次元では，有効場理論，転送行列法および実空間繰り込み群は等価になる）．

以上の古典転送行列法は，ハミルトニアン $\mathscr{H}$ が可換な相互作用の和で表され，ボルツマン因子 $e^{-\beta\mathscr{H}}$ が部分ボルツマン因子の積に書ける時にのみ使える．1985年筆者は，非可換相互作用で表される量子系に拡張した[2]．これは，ST 変換と呼ばれる方法を用いて d 次元量子系を $(d+1)$ 次元古典系に変換し，余分に増えたいわゆる“トロッター軸”（量子軸または ST 軸とも呼ばれる）だけを転送行列の作用空間とするアイデアを導入し，この「量子転送行列」の最大固有値から量子系の自由エネルギーを求める方法である（これは，量子情報を伝達する行列である）．一次元ハイゼンベルグ模型の基底状態はベーテ仮説の方法で求められていたが，有限温度の自由エネルギーを解析的に求めるのは，（ハミルトニアン $\mathscr{H}$ のすべての固有値を使ってボルツマン因子の和をとらなければならないので）長い間極めて難しい問題とされてきた．しかし，筆者の導入した量子転送行列法によると，その最大固有値を一つ求めればよいので，この問題は大きく進展し，一つの積分方程式によってその最大固有値（したがって自由エネルギー）が与えられることまでわかってきた[3]．この意味で，1次元量子スピン系の統計力学は，量子転送行列法を用いて解析的にも解けたと言ってよいであろう．

3. ゴム弾性，情報エントロピーおよび熱力学的エントロピー

天然ゴムから人造ゴムまで，これらは，タイヤ，パッキング，ゴム手袋などとして日常生活になくてはならないものとなっている．すべてゴムの弾性が利用されている．これを，久保[4,5]にならってエントロピーの概念を用いて考えてみる．ここでは，物の考え方の議論に重点を置きたいので，もっとも簡単なゴムのモデルとして，2つの長さ a, b $(a>b)$ をとり得る要素からなる鎖状分子を考える[6]．さらに簡単のために，どちらの状態でも固有なエネルギーの差はないものとする．長さ a の要素の数を n_a，長さ b の要素の数を n_b とすると，ゴムの長さ l は，$l=an_a+bn_b$ で与えられ，この鎖状分子の状態の数 $W(n_a,n_b)$ は $n_a=n_b$ のとき最大となり，どちらか一方だけのとき最小となる．前者は，ゴムの自然な長さの状態に対応し，$n_b=0$ は，ゴムが伸びきった状態に対応する．

この解説のねらいの一つとして，情報エントロピーと熱力学的エントロピーとの関係を議論したい．両者の関係を議論することが何故興味深く基本的であるかが，ゴムを伸ばすと熱が出ること[5]を上の簡単なゴムのモデルで説明するとよくわかる．すなわち，上に述べたように，ゴムを伸ばすと，n_b が小さくなり，$W(n_a,n_b)$ も小さくなる．したがって，$S_{\rm I}=\log W(n_a,n_b)$ で定義される（情報）エントロピーも減少する．これにエントロピーの次元をかけて，熱力学的エントロピー S を $S=k_{\rm B}S_{\rm I}$ と考えると，ゴムのエントロピーの変化は，熱力学第2法則より，$\Delta S=\Delta Q/T$（T は温度，ΔQ は熱量の変化）と書ける．よって，ゴムを伸ばすと，$\Delta S<0$ より，$\Delta Q<0$ となり，ゴムは熱を放出する[5]．この説明には奇異な感じを受ける人も多いであろう．上のモデルでは，2つの状態の固有なエネルギーは同じであるから，（文字 a,b の配列の数の変化と同じように）情報量の変化だけで熱が放出されるような妙な気がするかもしれない．勿論，この謎解きは自然長で熱平衡状態にあるゴムに張力 X が働くことによる仕事 $X(a-b)$ を考慮することにより直ちに解決される．この状況は，独立なスピン系に磁場をかける操作，または，逆に断熱消磁のメカニズムと類似している．

要するに，一般的に言って，情報エントロピーはエネルギーと無関係に定義される量であるが，熱力学的エントロピーは必ずエネルギー（または力）を伴った状態量である[7]．

4. 輸送現象と不可逆性（エントロピー生成）

アインシュタインによって1905年に提唱されたブラウン運動の理論が非平衡統計力学の草分けとなったことは良く知られている[8]．すなわち，こ

の理論で初めて，拡散係数などの輸送係数が，今風に見れば，平衡系での速さや流れの時間相関関数の時間積分で表されることが示された．これは半世紀後の1957年に久保[9]によって量子効果を正確に取り入れた一般的な枠組み（いわゆる久保公式）として確立された．その導出の要点を簡潔にまとめてみると次のようになる．系のハミルトニアン $\mathscr{H}(t)=\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_1(t)$ に対して，密度行列 $\rho(t)$ に関するフォン・ノイマン方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t)=[\mathscr{H}(t),\rho(t)] \quad (1)$$

から出発する．ただし，$\mathscr{H}_1(t)$ は外場 $\boldsymbol{F}(t)$ とそれに共役な物理演算子 $\boldsymbol{A}$ を用いて，$\mathscr{H}_1(t)=-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{F}(t)$ と表されるものとする．系は初期に外力の無いハミルトニアン $\mathscr{H}_0$ で記述される平衡状態にあると仮定する．すなわち，それは，$\rho_0=\exp(-\beta\mathscr{H}_0)/Z_0(\beta)$ というカノニカル分布で表される．ただし，$Z_0(\beta)=\mathrm{Tr}\exp(-\beta\mathscr{H}_0)$ であり，$\beta=1/k_{\mathrm{B}}T$ である．外力は小さいものとして，その1次まで $\rho(t)$ を $\rho(t)=\rho_0+\rho_1(t)+\cdots$ のように展開し，$\rho_1(t)$ の表式を ρ_0 と $\mathscr{H}_1(t)$ を用いて求める．任意の物理量 $\boldsymbol{B}$ の時刻 t における期待値 $\langle\boldsymbol{B}\rangle_t$ は $\langle\boldsymbol{B}\rangle_t=\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{B}\rho_0+\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{B}\rho_1(t)=\langle\boldsymbol{B}\rangle_0+\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{B}\rho_1(t)$ によって与えられる．第2項が外場 $\boldsymbol{F}(t)$ による線形応答を表し，$\boldsymbol{B}$ と流れの演算子 $\boldsymbol{j}=\dot{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A},\mathscr{H}_0]/i\hbar$ との“カノニカル時間相関関数”の時間積分で与えられることは周知の通りである[9]．特に，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}$ のときがよく使われる美しい公式である．

さらに問題をわかり易くするために，磁気応答[10]と電気伝導[9,11]という典型的な2つの現象について $\mathscr{H}_1(t)$ が時間 t に依らない場合を考えてみる．前者では，$\mathscr{H}=\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_1=\mathscr{H}_0-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{H}$ で記述される定常状態は通常の平衡状態に他ならない．しかし，後者のそれは，あくまで非平衡状態（電流 $\neq 0$）である．電界の強さ E に対する電流 $\boldsymbol{J}=\langle\boldsymbol{j}\rangle_E$ は $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ と与えられる．ただし，電気伝導度 σ は，断熱因子 $\mathrm{e}^{-\varepsilon t}(\varepsilon>0)$ を用いて

$$\sigma=\int_0^\infty dt\int_0^\beta d\lambda\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\langle\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}(t+i\hbar\lambda)\rangle_0 \quad (2)$$

と与えられる．

電流演算子 $\boldsymbol{j}$ が運動の定数を含むような可積分系（非エルゴード系）に公式(2)を応用するときには注意が必要である[12]．

50年も前の話をしていると，「最近の研究成果を聞きたいものだ」という久保先生の声が聞こえて来るような気がしてくる．生前，久保会に出席した比較的高齢の弟子達がそれぞれの挨拶のスピーチで昔話を続けていたら，久保先生が，「これからは，前向きに物理の研究の話をしようではないか」と言われたことを思い出す．そこで，最近国内外で年甲斐もなく興奮しながら講演している筆者自身の最新の研究を述べたい．それは，「輸送現象における不可逆性とエントロピー生成」という応答理論における大変基本的な研究テーマである．今までは主として熱力学的な議論によって，一部の人を除いて，納得していたように思われる．例えば，静的な電界 $\boldsymbol{E}$ の下での電気伝導では，単位時間当り消費される電力は流れる電流 $\boldsymbol{J}$ を用いて $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$ で表されるから，電気伝導度を σ とすれば，（$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ より）これは $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=\sigma E^2$ と表せる．したがって，これがジュール熱となることより，不可逆性が説明される．よって，エントロピー生成は $(dS/dt)_{\mathrm{irr}}=\sigma E^2/T$ であると解釈されてきた．勿論，この解釈は正しいのであるが，電気伝導度の公式(2)のような輸送係数のミクロな表式をフォン・ノイマン方程式(1)から統計力学的手法を用いて導いたのと同様に，エントロピー生成を第1原理的に(1)式から導出するという大きな課題が残っていた．それがやっと最近解決された[13,14]．

その解決は意外なところに見い出された．平衡系のエントロピー S_{eq} は平衡系の密度行列 ρ_0 を用いて $S_{\mathrm{eq}}=-k_{\mathrm{B}}\mathrm{Tr}\,\rho_0\log\rho_0$ と表されることはよく知られている．フォン・ノイマンはこれを非平衡系に拡張して，$S(t)=-k_{\mathrm{B}}\mathrm{Tr}\,\rho(t)\log\rho(t)$ を導入した．散逸項を手で入れた散逸的フォン・ノイマン方程式[15]では，この量 $S(t)$ は一応もっともらしい時間変化を示すが，もとの式(1)では，ユニタリー変換を用いると，上の $S(t)$ は時間 t に依らないことがわかり今の問題には役に立たない[8]．し

かし，線形近似 $\rho_{\rm lr}(t)=\rho_0+\rho_1(t)$ のように部分空間に射影して $S_{\rm lr}(t)=-k_{\rm B}{\rm Tr}\,\rho_{\rm lr}(t)\log\rho_{\rm lr}(t)$ とすると，2つの $\rho_1(t)$ の積の項から，E^2 のオーダーのジュール熱 σE^2 が導ける可能性がある．そういう淡い期待を持って，ρ_0 と $\rho_1(t)$ の非可換性を考慮した対数演算子のテーラー展開[16]という面倒な計算を（無駄に）試みた人も少なくないはずである．筆者も以前同じ失敗を経験している．そこで最近，非平衡系のエントロピー $S(t)$ の定義から考え直してみることにした．一般に任意のオブザーバブル（演算子）Q の時刻 t における期待値 $Q(t)$ は $Q(t)={\rm Tr}\,Q\rho(t)$ で定義される．エントロピーはそもそも状態量であるが，敢えて，エントロピー演算子 $\mathscr{S}$ を導入して，$S(t)={\rm Tr}\,\mathscr{S}\rho(t)$ と定義してみる．この定義は平衡系では正しいことがわかっているので，エントロピー演算子 $\mathscr{S}$ は $\mathscr{S}=-k_{\rm B}\log\rho_0=(\mathscr{H}_0-\mathscr{F})/T$ と結論される．そこで，早速，(1) の線形近似の解 $\rho_{\rm lr}(t)=\rho_0+\rho_1(t)$ を用いて，$S(t)={\rm Tr}\,\mathscr{S}\rho_{\rm lr}(t)$ を調べると，これは，$\mathscr{H}_0$ と $\mathscr{H}_1(t)$ の対称性の違いから恒等的に時間に依らず平衡系の値 $S_{\rm eq}={\rm Tr}\,\mathscr{S}\rho_0$ になってしまうことがわかる！ 驚くべきことに，平衡系のハミルトニアン $\mathscr{H}_0$ と同じ対称性を持つ高次の密度行列（外場に関して偶数次の部分密度行列）

$$\rho_{\rm sym}(t)=\rho_0+\rho_2(t)+\cdots+\rho_{2n}(t)+\cdots \quad (3)$$

が正しいエントロピー生成を与える[13,14]：

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{\rm irr}(t)={\rm Tr}\,\mathscr{S}\rho'(t)={\rm Tr}\,\mathscr{S}\rho'_{\rm sym}(t)$$
$$=\frac{1}{T}{\rm Tr}\,\mathscr{H}_0\rho'_2(t)+\cdots. \quad (4)$$

ついでながら，電流のような流れ $\boldsymbol{J}(t;\boldsymbol{F})$ は，残りの反対称密度行列 $\rho_{\rm antisym}(t)=\rho(t)-\rho_{\rm sym}(t)$ で表される：

$$\boldsymbol{J}(t;\boldsymbol{F})={\rm Tr}\,\boldsymbol{j}\rho(t)={\rm Tr}\,\boldsymbol{j}\rho_{\rm antisym}(t)$$
$$={\rm Tr}\,\boldsymbol{j}\rho_1(t)+{\rm Tr}\,\boldsymbol{j}\rho_3(t)+\cdots. \quad (5)$$

ここで，$\rho_{\rm sym}(t)$ と $\rho_{\rm antisym}(t)$ は基本方程式 (1) を通して互いに絡み合っている．例えば，次の関係が成り立っている：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\rm sym}(t)=[\mathscr{H}_0,\rho_{\rm sym}(t)]+[\mathscr{H}_1(t),\rho_{\rm antisym}(t)]. \quad (6)$$

以上の結果は，わかってしまえば，ごく自然に見えてくるであろう．こうして，線形，非線形応答を問わず，エントロピー生成は

$$\sigma_S(t)\equiv\left(\frac{dS}{dt}\right)_{\rm irr}=\frac{1}{T}{\rm Tr}\,\mathscr{H}_0\rho'(t)$$
$$=\frac{1}{T}{\rm Tr}\,\mathscr{H}_0\rho'_{\rm sym}(t)=\frac{\boldsymbol{J}(t;\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{F}}{T}$$
$$=\frac{\sigma_{\boldsymbol{F}}\cdot F^2}{T} \quad (7)$$

のように，対称成分 $\rho_{\rm sym}(t)$ を通して（ジュール熱で）表される[13,14]（温度 T と異なる温度 $T_{\rm st}$ で定常状態になるときには，(7) 式の T を $T_{\rm st}$ に置き換えればよい）．式 (1) に熱を外に取り出す緩和項 $-\Gamma\rho(t)$ が付け加わって[13]，系が定常状態になるときにも，エントロピー生成（不可逆性）は体積効果であるから，(7) 式の $\rho'_{\rm sym}(t)$ としては，緩和項を除いたダイナミカルな変化の効果のみ取り入れたものを用いる[13,14]．

次に，エントロピー生成速度最小の原理（プリゴジンの仮説）[18]を議論するために，$\sigma_S(t)$ の時間微分を求めてみると，

$$\frac{d}{dt}\sigma_S(t)=\int_0^\beta d\lambda\langle\boldsymbol{j}(-i\hbar\lambda)\boldsymbol{j}(t;\boldsymbol{F})\rangle_0\cdot\frac{F^2}{T} \quad (8)$$

となることが示せる[14]．ここで，$\boldsymbol{j}(t;\boldsymbol{F})$ は $\boldsymbol{F}$ を含んだ全ハミルトニアン $\mathscr{H}$ で変化する“流れの演算子”である．上式 (8) で因子 F^2/T を除いた $\boldsymbol{j}$ の時間相関関数を時間 t で0から ∞ まで積分すると輸送係数になる．

さらに，定常状態を表す物理法則は，非線形の場合も含めて次の新しい変分原理で記述される[14]：オンサーガーやプリゴジンの線形理論では瞬間的なエントロピー生成（すなわち，エネルギー散逸）を最小としているが，この原理は非線形の場合には成立しない．線形の場合も含めて統一的に成り立つ新しい原理は，“積分されたエントロピー生成”が最小になるというものである（線形の場合

には，両者の違いがたまたま因子 1/2 だけであるから，変分の結果は同じになる）．これは，電気回路，熱伝導，化学反応などに応用できる一般的原理である[14]．

5. 非線形非平衡現象，久保の示量性仮説および秩序生成

秩序生成などの非線形非平衡現象を具体的に扱うには，フォン・ノイマン方程式 (1) のようにハミルトニアンを用いるよりは，マスター方程式（フォッカー–プランク方程式）や確率微分方程式（ランジュバン方程式）などから出発した方が手っ取り早く見通しがよい．解の物理的特徴を取り出すには，何らかの漸近的方法を用いるのが便利である．その一つが，解を $P(X,t)=C\,\exp[\Omega\varphi(X/\Omega,t)]$ と漸近評価する久保の示量性の仮説である[19]．ただし，$P(X,t)$ は時刻 t で巨視変数 X が現れる確率を表し，Ω は系のサイズを表し充分大きいものとする．このとき，$\varphi(x,t)$ はハミルトン–ヤコビ型の方程式にしたがう[19]．この仮説は，ファン・カンペン[20]の Ω–展開 $X=y(t)+(1/\Omega)^{1/2}\xi(t)$ と対応している．ただし，$\xi(t)$ は系統的な変化 $y(t)$ に対するゆらぎの部分を与える．久保の示量性の仮説は一般的な条件の下で証明されている[21]．

次に，秩序生成のもっとも簡単なモデルで漸近評価を用いて，そのメカニズムの要点を説明する．アインシュタインのブラウン運動の理論で用いられた線形ランジュバン方程式の緩和項の符号を逆にし，不安定にして非線形項をつけ加えた次のランジュバン方程式

$$\frac{dx}{dt}=\gamma x-gx^3+\eta(t) \tag{9}$$

を考える[22]．ここで，$\eta(t)$ はガウシャン・ホワイトノイズとし，$\langle\eta(t)\eta(t')\rangle=2\varepsilon\delta(t-t')$ によって，その強さ ε を定義する．パラメータ x は磁化の強さのような秩序度を表す．ノイズ $\eta(t)$ は秩序度 x 以外の自由度の効果を表す．これが無ければ，(9) 式は平均場近似によるダイナミクスを記述する方程式である．残念ながら，この式（$\varepsilon=0$ の式）で，無秩序状態 $x=0$ から出発すると，$x(t)\equiv 0$ である．したがって初期には，ノイズの効果が重要である．ノイズによって出来た小さな秩序（の芽）が不安定線形項の効果により指数関数的に成長する（因みに佐藤–グスの宇宙のインフレーションのメカニズムも同様である）．やがて，秩序が充分成長すると非線形項によって安定化する．この途中でミクロなゆらぎがマクロな秩序に発展する過程を解析的に捉えるために，時間 t を非線形変換したスケーリング時間 $\tau=(g\varepsilon/\gamma^2)\mathrm{e}^{2\gamma t}$ を導入して，(9) 式の解を漸近評価し，秩序生成の時間（オンセットタイム）t_o が $\tau\simeq 1$ の条件から，$t_\mathrm{o}=(1/2\gamma)\log(\gamma^2/g\varepsilon)$ と与えられることが導かれる[22]．これより，ノイズが大きいほど，非線形性が強いほど秩序が出来易いことがわかる[22]．これは，秩序生成における相乗効果と呼ばれ，上記の理論は秩序生成のスケーリング理論として知られ，自由度無限大の系など，より複雑な系を扱うひな型として役立っている[8, 22]．

6. おわりに

他にも，久保の確率的リュービュ方程式，キュムラント展開，零磁場スピン緩和理論の山崎敏光氏らの μSR への適用[23]など興味深い研究が多数ある．久保先生は物理の研究を生涯続けるのを理想とされていたようである[24]．我々も生涯学び創り続けたいものである．いずれにしても，物質科学の多くの研究者が久保の恩恵を受けている[25]．

ここで，物理の研究以外のことに関する久保先生の横顔にふれておきたい．1960 年安保闘争で国会デモ中に樺美智子さんが死亡した翌日，東大でも茅総長を初め教官と学生が一体となって行動しようという機運が強まり物理教室で開かれた集会での久保先生の涙ながらの話が胸を打った．また，久保先生のご自宅に伺って，物理の話が済むと，モーツァルトやブラームスの LP レコードをかけて一緒に楽しんだ昔のことが今さらのように思い出される．また，新年会などには，若い人とピアノを連弾されたり，卓球や将棋をされたりと，暖かいお人柄が偲ばれる．この本の**裏表紙内側**に，久保夫人のご厚意により，久保先生のそのようなお

人柄を偲ばせる画文集「山河燦燦」の中の一枚の絵と文を掲載させていただいた．タイスの瞑想曲を聞きながら筆をおく．

追記　本誌 No.585 (2012) 3月号，このシリーズ第7回で宮沢弘成氏は，「シュヴィンガーの常温核融合の論文が一つも出版されず読む機会がなかったのだが，彼に直接話を聞きたかった….」と書いておられるが，実は，一つだけ，次の本に掲載されている：J. Schwinger, "Cold Fusion—Does it Have a Future?" in 『*Evolutionary Trends in the Physical Sciences*』edited by M. Suzuki and R. Kubo (Springer–Verlag, 1991).

参考文献

1) 久保亮五，物性論研究 **1** (1943) 1 およびその英訳 in Selected Papers of Professor Ryogo Kubo (Syokabo, 1980).
2) M. Suzuki, *Phys. Rev. B* **31** (1985); *Physica A* **205** (1994) 65. なお，*ST* 変換 (Suzuki–Trotter 変換) については，M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976) 1454 参照.
3) A. Klümper, *Z. Phys. B* **91** (1993) 507.
4) R. Kubo, *J. Phys. Soc. Jpn.* **2** (1947) 47, 51, 84.
5) 久保亮五，『ゴム弾性』[初版 (1946年) 復刻版] (裳華房，1996).
6) 久保亮五編，『大学演習 熱学・統計力学』[修訂版] (裳華房，1998).
7) M. Suzuki, *in Quantum Information and Computing* edited by L. Accardi, M. Ohya and N. Watanabe (World Sci. 2006).
8) 鈴木増雄，『統計力学』(岩波書店，2000).
9) R. Kubo, *J. Phys. Soc. Jpn.* **12** (1957) 570.
10) R. Kubo and K. Tomita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **9** (1954) 888.
11) H. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* **15** (1956) 77; *Int. J. Mod. Phys. B* **7** (1993) 2397.
12) M. Suzuki, *Physica* **51** (1971) 277; P. Mazur, *Physica* **43** (1969) 533.
13) M. Suzuki, *Physica A* **390** (2011) 1904.
14) M. Suzuki, *Physica A* (2012) 1074, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* (2012) に出版予定，および *Physica A* に Paper III として新しい変分原理の論文を投稿中.
15) M. Suzuki, *in Quantum Bio-Informatics* edited by L. Accardi *et al.* (World Sci. 2008).
16) M. Suzuki, *Commun. Math. Phys.* **183** (1997) 339; *Prog. Theor. Phys.* **100** (1998) 475.
17) R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II* (Springer–Verlag, 1991).
18) I. Prigogine, *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes* 2nd ed. (Interscience, New York 1961).
19) R. Kubo, *in Synergetics*, edited by H. Haken (Teubner, Stuttgart, 1973). R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, *J. Stat. Phys.* **9** (1973) 51.
20) N.G. van Kampen, *Can. J. Phys.* **56** (1961) 55; *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1983).
21) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **53** (1975) 1657; ibid **55** (1976) 383, 1064.
22) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976) 77, 477; ibid **57** (1977) 380; *J. Stat. Phys.* **16**. (1977) 11; *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **64** (1978) 402; *Adv. Chem. Phys.* **46** (1981) 195 (このレビューは，1980年の第17回ソルベイ会議 (プリゴジン主催) の招待講演の内容をまとめたものである．また，このソルベイ会議報告は，日本物理学会誌第34巻第6号 (1979) 521 にも出ている).
23) 山崎敏光，日本物理学会誌 第50巻第11号 (1995年)，久保亮五先生追悼号，888.
24) 久保亮五，随筆——老人研究所 (日本学術会議月報第23巻8月号 (1982) 101). 一部抜粋すると，「老人を研究するところではない．老人が研究する研究所の構想である．それには三つのすぐれたメリットがある．第一に，この研究所には老朽化の心配がない．第二にこの研究所は自由であり，独創性に富む．第三にコストパフォーマンスが良い.」とあり，以下それぞれに注釈がついている．実は，筆者もこの記事を知らずに，1990年頃からあちこちで (同年7月5日には松尾財団の研究会で，同年11月22日には「基研の将来像」という将来計画シンポジュームなどで)，「中抜き研究所」という提案をしていた折に久保先生から，この随筆を教えて頂いた．いずれにしても，最近は学振なども "元気な" 高齢研究者には研究の機会を与えるようになってきており喜ばしいことである ("元気な老人" は活用すべきである).
25) 『20世紀の物理学』(「20世紀の物理学」編集委員会編，L.M. Brown, A. Pais, Sir B. Pippard, 丸善，1999) の第1巻の616頁には，久保先生の写真入りのコラムで久保の物性物理への影響の大きさが紹介されている．

(すずき・ますお，東京大学名誉教授)

科学と社会

Science & Society

第5回 国家・学問・戦争の諸相

挑むための受容

岡本 拓司

前回は，明治20年（1887年）前後，憲法制定，外交，教育政策などの諸方面において，西洋の枠組みを受け入れて変革を行いながらもそこに日本の歴史や文化の継続性を保つ方法が見出されていった過程や，独自性を発揮しながら国家存続のために西洋の枠組みの中で戦いを続けていく覚悟が明らかにされていった経緯について論じた．言い方を換えれば，明治維新後の日本で，西洋化と伝統保持をどう両立させ，またその両立の仕方をどう正当化するかという問題にどのような答が与えられたかを論じたのであるが，同じ時期，同様の課題は，西洋型の学問の習得を要求された若者たちにも突きつけられていた．今回は，自然科学を含む学問の世界の動向について論ずることとしたい．

5.1 学者は世界と戦う

明治維新後，それ以前の伝統とは異なる西洋型の学問を，時には西洋語によって学ばなければならなかった若者たちが，どのような意識を抱いていたかを知るための手がかりは，例えば夏目漱石（1867–1916）の回想[1]の中に見つけることができる．

漱石は十代半ば頃から文学に興味を覚えていたが，これが職業になるかどうか確信を持てないでおり，東京大学予備門に入る頃には，建築ならば趣味のある職業でありながら社会にも必要とされると考えるようになっていた．ところが，予備門（在学中の明治19年に第一高等中学校となる）で出会った哲学志望の米山保三郎（1869–1897）に，日本で腕を揮ったところでセントポール大寺院のような建築を残すことはできないと説かれ，再び文学を志すようになった．それでも，進学した帝国大学では漢文科や国文科は選ばず，「英語英文に通達して，外国語でえらい文学上の述作をやつて西洋人を驚かせやう」との希望をもって英文科に進んだという．

米山も漱石も法学・工学・農学といった実用的な分野を志さない点が共通しているが，このように「趣味を持った職業」として学問を目指した若者たちは，明治20年頃には，世界にむけて何事かを問おうという姿勢を，ごく自然に持っていたようである．米山は，日本で建築家になっても世界に成果を問うことはできないと言い，漱石は，外国語の著作で西洋人を驚かせようと考えて英文科に進んでいる．

漱石とほぼ同時期に予備門にいた南方熊楠（1867–1941）の場合は，西洋への態度は米山や漱石よりも攻撃的である．南方は，イギリス留学中の明治30年（1897年）3月16日，大英博物館の東洋書籍部の部長，ロバート・ダグラス（Robert



六六

就學所	入學年月	入學等級	族籍	姓名	生年月
廳募	明治十七年九月	四級	東京府平民	夏目金之助	慶應三年一月
群馬縣中學校	仝	英語專修	群馬縣平民	松本亦太郎	仝元年九月
廳募	仝年九月	四級	仝縣士族	渡邊又次郎	仝二年十一月
仝	仝十八年九月	仝	石川縣士族	米山保三郎	明治二年一月
仝	仝	仝	北海道廳平民	菊池壽人	明治元年十一月

図 5.1　『第一高等中学校一覧　自明治二十二年至明治二十三年』より，一部第二年三之組（文科）の名簿の一部．夏目漱石（金之助）と米山保三郎の名前がある．

Kennaway Douglas, 1838–1913）の部屋で孫文（1866–1925）に出会っている[2]が，孫文に一生の所期を問われて，「願わくはわれわれ東洋人は一度西洋人を挙げてことごとく国境外へ放逐したきことなり」[3]と答えた．孫文が狼狽するのを見て，南方は「この輩いずれもあんまりえらい人物ならざる」を知ったと回想している．南方の研究はこの態度を反映しており，外国人に日本のことを知らせるばかりでなく，「外国には日本よりつまらぬこと多きを必ず付記して警告」するよう努めたという．

南方は，西洋で出会った日本への差別的言辞の一切に反駁し，例えば日本は南米の如しと言われれば英国はアフリカの如くなるべしと応じた．彼の，外国で「奉公」しながら自国の言い分を通したという自負の基本には，科学を西洋人の独占であるかのように言うのは誤りであり，東洋にも「科学智識」の発達はあったという確信や，欧米人にも「条理の立たぬ議論」が多いという観察があった．南方の例からは，成果を西洋に問おうという気概が，ときに，まだ不安定であった日本の国際的な地位への意識もあって，学問上の議論で西洋人と対決しようという攻撃的な姿勢に転化する場合もあったことが分かる．

文学を志す者でも，世界を念頭に置くという傾向は，大正に至っても引き継がれていた．大正 5 年（1916 年）1 月 20 日の川端康成（1899–1972）の日記には，大正 2 年（1913 年）にアジア人として初めてノーベル賞を受賞し，当時来日の噂もあったインドの詩人タゴール（Rabindranath Tagore, 1861–1941）を意識してか，以下のような一節がある．「俺はどんな事があらうとも英仏露独位の各語に通じ自由に小説など外国語で書いてやらうと思つてるのだから　そしておれは今でもノベル賞を思はぬでもない　尚私はエスペラント語を主用語としたいと思つてるのだ　語尾が品詞によつて同じだから詩などの声調はうまくゆくと思つてる」[4]．川端も漱石と同様，東京帝国大学では英文科に進んだが，後に国文科に移っている．

5.2 世界共通の競争の場

西洋に向けて作品を発表しようとした漱石は，しかし，次第に専攻していた英文学に疑問を覚えるようになっていた．イギリス留学中の自分を振り返って，漱石は，「西洋の詩などのあるものをよむと全く感じない，それを無理に嬉しがるのは何だかありもしない翅を生やして飛んでる人のやうな，金がないのにあるやうな顔して歩いて居る人のやうな気がしてならなかった」[5]と述べている．勉学が進むうち，母語ではない言葉で書かれた作品を評価することの困難を思い知るようになったのである．

そこへ，化学者の池田菊苗（1864–1936）がドイツからやってきて，漱石の下宿に泊まった．池田と議論するうち，漱石は，「組織だつたどつしりした研究をやらう」と考えるようになった．同時期に寺田寅彦（1878–1935）に書いた手紙（明治 34 年 9 月 12 日付）[6]でも池田との邂逅について触れており，「学問をやるならコスモポリタンのものに限り候英文学なんかは椽の下の力持日本へ帰つても英吉利に居つてもあたまの上がる瀬は無之候」

と書いている．寺田には，「君なんかは大に専問(ママ)の物理学でしつかりやり給へ」と助言し，自分も英国科学振興協会で発表された原子論に関する演説を読んで「何か科学がやり度なつた」と告げた．

西洋に向けて作品を問おうとした漱石は，言語の習熟度によって表現の制限される文学は，物理学や化学のような「コスモポリタン」な領域ではないことに気づいたのである．明治維新後 20 年から 30 年を経て，学問において西洋に挑戦しようとしても，それが成り立つ分野とそうでない分野があることに，研究の最前線にいる人々は気づこうとしていた．漱石自身の「組織だつたどつしりした研究」は，例えば彼が帰国後に行った講義，『文学論』[7]に結実したと見ることもできる．しかし，漱石がこれを講じたのは日本の学生に対してであった．学問の個々の領域には，それぞれ固有の「聴衆」があり，すべての分野が世界中の人々に向けて成果を問う必要はないのである．

漱石と同様の観察は，近代鳩山家の祖，鳩山和夫（1856–1911）によってもなされている．鳩山は，次男の秀夫（1884–1946）が，東京帝国大学法科大学の卒業を前に進路について相談に来たところ，自分はかつて大学教員の職を離れて政界に出たことを申し訳なく思っている，大学に寄附するようなもので惜しいのだが，お前は大学で教授の職に就いてくれと頼んだという．寄附するようで惜しいというのは，以下のような理由による．

凡そ学問をやる以上は，何人と雖も世界的の学者にならねばその効はない，然るに法律の方面においてはそれは困難な問題である，何となれば，その研究するところの材料が必然的に世界的であれば宜しい，だが，その研究せんとする材料はすなはち日本の法律である，これが物理学や化学等の自然科学と法律との世界的価値に於て相違して居る点である．勿論法律学においても世界的価値のある研究を為すことは不可能ではない，しかし，材料が主として世界的に共通なる自然科学と材料が主として一国，一社会に限られたる法律学とは，その世界的価値を認めらるべき発見，研究を為すにおいて非常なる難易の差異がある．結局において日本の法律論であり，研究である，従つて日本の法律学者たらんよりは，寧ろ自己の学問を以て活社会に出で，より以上に活動したが宜いのである[8]．

鳩山もまた，学問を行う以上は世界に向けて研究を問わねば意味はないとする世代に属しており，しかし，自身や秀夫の修めた法律学という分野では，自然科学とは違って世界的価値のある研究を為すことは困難であると考えていた．鳩山は，イェール大学で法学博士号を取得するなど海外の法学にも通じており，また東京大学・帝国大学で教鞭をとった経験もあった．上の見解は，この経験をもとに築かれたものであった．秀夫は鳩山の言葉に従い，大学卒業直後の明治 41 年（1908 年）に母校の講師となった．

世界に成果を問おうとして文学や法学を選んだ者たちは，自然科学のもつ「コスモポリタン」的な性格や「世界的価値」を，あらゆる学問領域が共有しているわけではないことに気づきつつあった．西洋への挑戦を志して文学や法学を学び始めても，理解が増すにつれて，自分の分野がそうした挑戦に適したものではないことを了解するようになっていった．彼らが見出した科学の特徴は，この分野の学問としての性格（方法と対象）や，それに基づいて，17 世紀以降，19 世紀末までに整えられた科学研究の制度（学会，学術誌など）に由来するものであった．若いうちから自然科学に近い領域への関心も深かった南方の言動には，本人の性格もあってか，漱石や鳩山が経験しなければならなかった，学問の「世界的価値」に関わる発見の痕跡は見当たらないように思われる．

5.3 田中舘愛橘と長岡半太郎

南方のように科学を志しながら，将来の選択に苦悩した者の例もある．よく知られているのは，青年期の長岡半太郎（1865–1950）の煩悶である[9]．

長岡もまた，「外国から学問を輸入し，之を日本

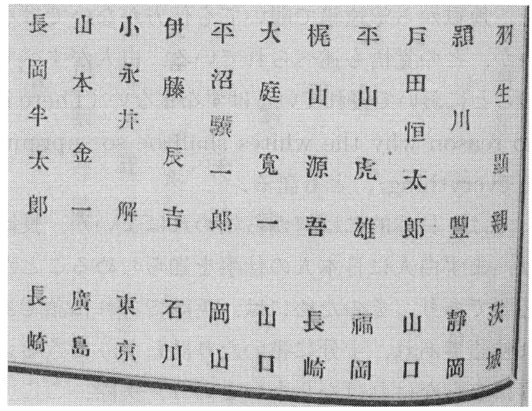
人間に宣伝普及するは，宿志ではありません」と後に回想する型の学者であり，目指すのは，「必ずや研究者の群に入りて，学問の一端を啓発」することであり，そうでなければ「男子に生れた甲斐がない」と考えていた．しかし，具体的にどの分野に進むかを決める際に，迷いが生じた．

長岡の在学当時はまだ文理に分けた教育を行っていなかった東京大学予備門でのことであったか，あるいは大学院進学時のことであったかは明らかではないが，将来の専門として自然科学を選んだ場合，遺伝や環境の影響で，そもそも東洋人にこの分野で成功する可能性がない，あるいは独創性がないとすれば，一生を無駄にすることになり取り返しがつかないとの疑念がきざしたのである．現在から考えれば奇妙にも思われるが，洋式の学校で手にする教科書に東洋人の名前が一切出てこない当時の状況を考えれば，それほど不思議な発想ともいえまい．

悩んだ長岡は，中国の古典をひもとき，科学に関する事項を調べてみた．中国人であれば人種的にも日本人とそれほど相違はないだろうと考えたのである．すると，『春秋』に日食や月食の記録や流星の記事があり，またオーロラや地磁気などの発見では中国が西洋に先んじている可能性があることも分かった．幾つかの古典を見た上で，長岡は，自然科学に進んでも，必ずしも欧米人の後追いばかりをする必要はないと確信し，物理学を専攻することを決意した．ここに至るまでに，1 年ほどが歴史の研究に費やされたという．

長岡は，言ってみれば，自然科学が，東洋・西洋共通の知的競争の場となり得ることを確かめたのである．予備門から大学にいた頃のこととすれば明治 20 年前後の話であり，漱石が科学の「コスモポリタン」的性格に気づくのはその 10 年以上後のことであった．初めて本格的に西洋の学問を修得することを迫られた世代は，その西洋の学問の中にも様々な性格の違いがあることを，各人各様に見つけていかなければならなかった．

いったん競争の場を見つけた長岡は，闘争心を隠そうとはしなかった．年の近い助教授の田中舘



羽生顯親	茨城
頴川豐	静岡
戸田恒太郎	山口
平山虎雄	福岡
梶山源吾	長崎
大庭寛一	山口
平沼騏一郎	岡山
伊藤辰吉	石川
小永井解	東京
山本金一	廣島
長岡半太郎	長崎

図 5.2 『東京大学予備門一覧　明治十四，五年』より，第一級一ノ組の名簿の一部．このころは文理の別はなく，長岡半太郎と平沼騏一郎が同じ組にいる．

愛橘（1856–1952）がヨーロッパに留学している間，長岡は彼に宛ててたびたび手紙を書いているが，ケルヴィン（ウィリアム・トムソン，William Thomson, 1824–1907）を「トム公」と呼ぶなど意気軒昂である．特に，1888 年 6 月 7 日付け（長岡自身が西暦を使っている）の手紙[10]では，田中舘の手紙によって，西洋文明が底の浅いもの（superficial）であり，西洋の天狗の仕事が粗っぽいものであることを知ったと告げ，白人（the whites）の行うことであれば何であれ信頼に足るとして称賛する人々は臆病者（cowards）に過ぎないと喝破している．また田中舘に対しては，自分たちの責務は，これらの白人を追い越し，彼らを打ち負かし（beat），その本性を明らかにすることであると述べている．かつては東洋人の能力に確信の持てなかった長岡は，わずか数年後には，西洋人相手の勝負に見込みがあると書くようになっていた．

長岡の鼻息の荒さは，しかし，日本の置かれた状況を見れば，本人にとっても空元気に思われたに違いない．同じ手紙の中で，長岡は，何をするにも因循が支配する日本では，先に進むのが困難であると嘆息してもいる．それでも，あるいはそれだからこそ，本人の決意には固いものがあり，感覚を鋭敏にして疲れを知らずに休むことなく働き，10 年か 20 年の後には西洋人を打ち負かしたい，自分たちが死んでから子孫が勝利しているの

を，地獄から望遠鏡で覗いても仕方がないではないか，との覚悟も述べられている．白人がすべてのことにおいて優れているはずなどない（There is no reason why the whites shall be so supreme in everything），とも語る．

では，具体的には何から始めればよいか．長岡は，まず白人に日本人の仕事を知らしめることが必要であり，そのためには，英語であれ仏語であれ独語であれ，十分に書いたり話したりできるようにならなければならないという．実際，ここで紹介した田中舘宛の手紙も，英語で書かれている．

5.4 競争的学問観

明治維新以降，農学や工業など，産業・軍事の面からの必要性が明らかな分野で西洋式の学問の導入が進んだ経緯は比較的理解しやすい．しかし，同時期に，数学や物理学など，実用的な価値の見えにくい学問の導入も進んでいる．これらは工学や農学の基礎として導入されたと考えても必ずしも当を失しているとはいえないが，そうすると，一定の期間を経た後の，例えば原子核・素粒子物理学の特に理論研究が強いといった日本の学問の特質はうまく理解できなくなる．

既にみた通り，明治維新期の日本には，実用的な価値を度外視して学問を尊重する姿勢があり，生涯をかけてこれを担おうとする若者たちもいたのである．前回，森有礼が，学問には「純粋」と「応用」があるが，日本の現状に鑑みて後者に重きを置くべきであると考えていたことを見た．こうした文教政策の担当者の思惑をよそに，実際に学問を担おうとする若者たちの中には，初めから実用を度外視した学問を目指す人々がいた．漱石や長岡がそうであり，また彼らより前の世代の田中舘にも同様の傾向はあった．彼は，道徳や政治といった分野では日本が西洋に学ぶべき点はないと考え，誕生したばかりの東京大学に進む際には，物理学を志望するようになった．このとき，志望を問われて物理学と答えれば，当時生徒の将来を慮ることで定評のあった濱尾新（1849–1925）先生が，物理や天文で飯が食えると思うかと案ずるだろうと指摘する友人に対し，飯は茶碗と箸で食べますと答えると応じたという逸話がある[11]．

さらに，純粋な学問に進もうとする若者を奮い立たせたのは，国家の安定が確実ではない状況下でも，学問の世界ならば西洋に挑戦する余地があるという意識であった．国家の指導者たちは政治や経済における国家間競争を優先したが，若者たちは，例えば森有礼がそれはまだやらなくてよいといった純粋に知的な分野の競争を，誰に勧められたというわけでもなく始めようとしていたのである．こうした事態が生ずる前提として，国家や民族に関わる自尊心と，これを知的な領域で発揮しようという傾向が，一定の数の人々の中に存在していたことを認めなければならない．長岡が，中国の古典を研究して東洋人も自然科学を行いうることを確認したという事実からは，この段階では単に日本のみならず東洋（正確には中華文化圏）を代表して西洋に立ち向かおうという意識があったと考えることもできるようにも見える．しかし，長岡の意識により忠実に見れば，日本の古典として漢書を参照したのであり，現実には日本とは異なる状況に置かれていた当時の東アジアの諸地域・諸民族を配慮したとは想像しがたい．関心の中心にあったのは，西洋との知的対峙を迫られている日本の状況であった．

学習が進むうち，しかし，あらゆる学問分野が，競争の場としてすべての人々に開かれているわけではないことも見出されていった．文学や法学は適切ではなく，一定の方法を受け入れれば，どの文化圏に所属していようが，同じ基準にかなう成果を得ることが原則としては可能であるという点で，「コスモポリタン」であり「世界的価値」をもつ自然科学が，競争のための場を提供することとなった．しかし，自然科学自体が日本の伝統からすれば異質なものであり，ましてやそこを舞台にした世界規模での知的競争などは，明治期以前のどの時代の日本人も経験したことはなかった．蘭学・洋学の伝統の影響は小さく，西洋に挑戦しようとする若者の念頭には上らなかった．世界史的

に見ても，こうした挑戦は珍しいものであったと思われる．

挑戦のためであれば，西洋由来の学問を一方的に受容することに伴う屈辱感は薄れたものと考えられる．この事情は，田中舘・長岡の間でのやりとりを見れば了解できる．長岡は，英独仏語に習熟する必要があると説き，2人の間の手紙は，誰に頼まれたわけでもないが英語で記した．すでに前々回・前回に，明治天皇が巡幸の際に見た英語での電信の実演を日本語に直させ，森有礼の英語採用論が種々の反発を受けたことを見たが，強いものに屈して外国語の習得が強要されることには反発があっても，知的自尊心をめぐる戦いのためであれば，能力においてそれが可能である層は，進んで外国語を習得しようとしたのである．なお，遥か後の大正8年（1919年），第一次大戦によって日本の版図が一気に拡大した時点で，北一輝（1883–1937）が上海で草した『日本改造法案大綱』には，英語に代えてエスペラントを第二国語とすることが謳われており，その理由の一つとして，世界帝国となる日本の公用語には英語より優れた国際語が相応しい旨が述べられている．ここにも，また前述のエスペラントの詩で韻を踏むという中学校時代の川端康成の夢想にも，外国語に関する同様の感覚を見ることができよう．

5.5 孫文の「大アジア」演説

一方で，知的競争の枠組みとして西洋由来の科学を受容するという姿勢は，科学自体に一定の，というよりむしろかなり高度な，知的権威を認めていなければ成立しない．科学とは，明治期の若者たちにとっては，そこで何が行われていても気にならないような取るに足らない領域ではなく，自らも参加して栄誉を勝ち取り，同時に民族と国家の地位を高からしめるための対象であった．この点で，例えば，後の大正13年（1924年）に孫文が神戸で行った「大アジア主義」演説は，同じ中華文化圏に属する知識人のものでありながらも，対照的に見える科学観を提示している．

孫文の「大アジア主義」演説は，アヘン・アロー戦争以来続く中国の動乱は，西洋諸国の軍事力を用いた進出によって招かれたものであるとの観察の下に，アジアに属しながら軍事や産業において西洋文明の成果を取り入れることに成功した日本が，今後，アジアを圧迫する側に向うのか，それとも解放に貢献するのかを問うたものである．日本が今後，西洋覇道の番犬（西方覇道的鷹犬）となるか東洋王道の干城（東方王道的干城）となるかは，日本国民の選択にかかっているという末尾の句はよく知られている．

孫文が講演をした時点では，日本は，中国に対していわゆる「二十一か条の要求」（大正4年）を突きつけるなど，圧迫的な態度をあらわにしており，孫文も，日本への期待は残しながらも，その対中国政策には批判を強めていた．しかし，講演前に，旧知の頭山満（1855–1944）に満蒙における日本の特殊権益の返還について言及しないよう注意を受ける[12)]などの経験をした孫文は，講演では日本批判は行わず，条約改正の成功や日露戦争での勝利などの日本の偉業を称えることに終始し，日本がアジア復興の要であると論じた．

孫文が，日本はアジアのために尽力すべきであると説くにあたって論拠としたのは，文化における東洋の優位であった．孫文によれば，アジアは世界最古の文明の発祥の地であり，ギリシア・ローマの文化もアジアから伝わったという．しかしアジアはやがて衰退し，代わって強大になった西洋の侵略を受けることとなった．西洋の力の源には，科学や功利，武力を重んずる物質文明があると観察する孫文は，これを孟子（前372?–前289）に由来する用語を用いて「覇道」と呼び，力ではなく仁義・道徳による感化に基づく支配を理想とする，東洋の「王道」と対比させた．世界で繰り広げられているのは，王道の東洋文化と覇道の西洋文化の争いであるが，孫文にとっては，道徳に基づく東洋が優れているのは明らかである．孫文も，西洋の科学や工業，技術を取り入れる必要は認めるが，それは他国を滅ぼすためではなく，飽くまでも自衛のためであると主張する．その上で孫文

は，いまや軍事と産業において西洋諸国に比肩する力をつけた日本は，仁義と道徳に基づく東洋の文化の勝利のために，西洋と対峙すべきではないかと説く．

文化において東洋が優れているとする孫文には，西洋と知的競争を行おうという発想はなく，従って，西洋由来の知的枠組みである科学を，挑戦のためであれ文化の一部として受容しようという態度も見せない．科学は物質文明の一部であり，孫文は，その成果の一部を自衛のためにやむなく受け入れることを認めるのみである．中華文明のただ中にいる孫文にとって，何が文化の尺度であるかは自明なのである．

日本においても，幕末・維新期には，和魂洋才や東洋道徳西洋芸術といった言葉に見られるとおり，西洋の影響を文化の根幹たる精神的な部分に及ぼさないようにする態度は存在した．田中舘愛橘も，倫理や政治において西洋に学ぶものはないと看做して物理学を学ぶことを選んだ．しかし，明治半ばに科学を舞台とする知的競争に参加する決意を明らかにした若者たちは，そのことによって，暗黙のうちにであれ，科学にはそこで競うに足る文化的価値があることを示したといえる．科学における日本人の挑戦を鼓舞するためには，科学そのものの価値の承認がまず必要であった．また，一部ではあれ西洋の産物に知的・精神的価値が認められたことにより，その価値ある部分を生んだ西洋文明の，いったいどこに秘密があるのかを探る，際限のない行程への入口の一つが開かれることにもなった．

「大アジア主義」講演を見ると，西洋の力に曝された時間も短く程度も小さかった日本で，中国よりも迅速に西洋文明の精神的な価値の評価がなされた主要な理由の一つが，日本が中華文明圏の中でも辺縁にあったという事情にあることが理解できる．辺縁にあった日本は，比較的容易に中華文明を離れて西洋文明に参加することができた．西洋に対抗し得る価値観の発祥の地である中国ではこれは困難であり，また中華文明への所属度の高い朝鮮においても同様であった．

5.6 ベルツの在職二十五周年演説

自然科学を日本に伝えた西洋人にとっても，挑戦を通した科学の受容といった事態を想像することは困難であったようである．孫文の演説に先立つこと 23 年，明治 34 年（1901 年）に行われた，医師ベルツ（Erwin von Bälz, 1849–1913）の演説[13]は，日本の世界における立場や固有の文化を尊重することにかけては日本人よりも積極的であった西洋人でさえ，科学について語ると，西洋からの精神の導入の必要を説く論調となることを示している．

ベルツは，明治 9 年（1876 年）に東京医学校での勤務を始めて以来，内科学を中心に医学教育に従事し，日本固有の疾病の研究や人類学・民族学的な日本の紹介も行った．明治憲法発布の祝賀の様子を描写しながら，「だが，こっけいなことには，誰も憲法の内容をご存じないのだ」[14]と記した明治 22 年（1889 年）2 月 9 日の日記の文句はよく知られているが，彼の観察の大半は，高みから見下ろす傲慢さではなく，西洋化を急ぐあまり無理をする日本への配慮に基づいている．在職 25 周年を記念して明治 34 年に行われた講演も，本人は厚意に満ちた忠告であると理解していたが，だからこそ，そこにはごく自然に，この時代の西洋人の科学観と日本観が表現されているように思われる．

ベルツは，日本人は西欧の学問の成り立ちと本質について大いに誤解していると指摘する．日本人は，西洋の学問を，簡単にほかへ移して稼動させることのできる機械のようなものであると考えているというのである．ベルツの見解では，西洋の学問は固有の歴史と文化を土壌として育った有機体であり，そこにはピタゴラス，アリストテレスからファラデー，ダーウィンらに至るまでの苦闘の跡が刻まれている．この成果はアレクサンダー大王によってアジアにももたらされ今日もその影響を見ることができるが，対するに，同じ世界帝国を作ったモンゴルの支配の跡には見るべきものはない．ベルツの見るところ，全世界に広がる文化を生むことができたのは西洋なのである．

ベルツは，西洋の学問を受け入れようとする日本に協力してきたが，彼を含む西洋人の教師たちが，学問の樹が日本の土壌の上に育つよう努めてきたのに対し，日本人たちは学問の果実の切り売りのみを求めているように見えることを嘆く．そして，今からでも遅くはないから，外国人を利用して，西洋の精神をこそ吸収すべきであると勧めるのである．

純粋な厚意に満ちてはいるが，20世紀初頭の西洋人は，他民族に対して自分たちの精神を受け入れよと勧めてはばかることがなかったことが分かる．長岡ならば，挑戦するために必要な最小限の部分は受け入れるが，それ以上については，白人の行うことがすべてよいとは限らないと反発したかもしれない．孫文であれば，西洋の精神は東洋の土壌には根付かないとはねつけたかもしれない．しかし，ベルツにとっては，西洋の学問は世界に広がるべきものであり，他地域の人々は，学問とともにこれを支える西洋の精神をも学び取らなければならないのであった．

ベルツの指摘は，しかし，挑戦のためであれ西洋の学問を選んだ人々の一部にとっては，挑戦のために必要なものの底知れなさを窺わせる効果があったかもしれない．挑戦にむけて科学研究を行うために必要な知識や訓練がどの程度であるかは，外国人の教師や教科書，雑誌などから知ることができよう．ところが，そこからさらに進んで，西洋人を瞠目させるような成果を得るために必要なものが何であるかは，容易に知ることができない．ベルツの言うとおり，西洋の精神を吸収しなければならないとして，それは果たしてギリシア・ローマの文化なのであろうか，それともキリスト教なのであろうか，あるいはさらに別の何かなのであろうか．競争を介してであっても，いったん精神的な要素の受容の口を開いてしまえば，競争での成功が目に見えて明らかになるまでは，あるいは明らかになったあとでも，吸収のための際限のない模索が続く可能性はあった．

なお，ベルツに対しても，また孫文に対しても，聴衆は心からの歓迎の意を表して拍手を送った．孫文の場合には，日本語の新聞では賞賛を，英字新聞では批判を掲載するという狡猾さ（とそれを外国人に指摘されるという不用意さ）も見られたが，それにしても，西洋の精神を学べという声と，東洋の道徳に還れという叫びの両方に，決して欺瞞的ではない賛意を覚えるという点に，明治維新以降日本が置かれた文化的な位置の面白さがあるように思われる．ただし，どちらかの選択を迫られる事態に至れば，面白さは途端に過酷さに転ずるであろうが．

今回は，西洋への挑戦に向けた意志をもとに，明治半ばの若者たちが西洋型の学問の吸収を目指したこと，およびその過程で，次第に科学が挑戦の舞台として適したものであるとの認識が生じていった経緯を明らかにした．次回からは，具体的な人物や個別の出来事に即して，明治以降の科学の受容がどのようになされていったかを論ずることとしたい．

参考文献

1) 夏目漱石「談話（時機が来てゐたんだ）」,『漱石全集』第二十五巻（岩波書店，1996年），279–283ページ.
2) 飯倉照平『南方熊楠』（ミネルヴァ書房，2006年）.
3) 柳田国男宛書簡，明治44年11月17日，飯倉照平『柳田国男　南方熊楠　往復書簡集』（平凡社，1976年），156–171ページ.
4) 川端康成記念会編『川端康成全集』補巻一（新潮社，1984年），286ページ.
5) 夏目漱石，前掲[1]，「談話（時機が来てゐたんだ）」.
6) 『漱石全集』第二十二巻（岩波書店，1996年），237–238ページ.
7) 夏目漱石『文学論』（上）（下）（岩波文庫，2007年）.
8) 鳩山春子編纂・発行『鳩山の一生』(1929年), 46ページ.
9) 板倉聖宣・木村東作・八木江里『長岡半太郎伝』（朝日新聞社，1973年），39–44ページ.
10) Kenkichiro Koizumi, "The Emergence of Japan's First Physicists: 1868–1900", *Historical Studies in the Physical Sciences*, **6** (1975), pp.3–108.
11) 中村清二『田中舘愛橘先生』（中央公論社，1943年）.
12) 陳徳仁・安井三吉『孫文・講演「大アジア主義」資料集』（法律文化社，1989年）.
13) ベルツ「大学在職二十五周年祝賀会における挨拶」，エルヴィン・ベルツ著，若林操子編訳，山口静一・及川茂・池上純一・池上弘子訳『ベルツ日本文化論集』（東海大学出版会，2001年，433–442ページ.
14) トク・ベルツ編，菅沼竜太郎訳『ベルツの日記（上）』（岩波文庫，1979年）.

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

特　集（2012 年 7 月号予告）

数学と物理における格子

整然とした形でとらえる数理現象

本体 952 円

編集後記

今回の特集の記事を見ると，物理には様々な“面白い”あるいは“すごい”発想があるのだな，ということを実感しました．こうした発想が生まれるには，その人のそれまでの経験や周りの環境も大きく関係しているのではないかとも思いますが，“面白い”発想をする人から学ぶことはとても多いです．

私も普段から様々な物事に対して，いろいろと考えるようにしていますが，こうした発想の訓練と同時に日々の精進も大事そうです．　(R)

＊　　＊

今回の特集で紹介された面白い発想には大変感心しました．私も生活のいろいろなところで面白い発想，すごい発想ができるようになりたいと思いました．

記事を読んでいて感じたことは，疑問や悩みが生じたときにそういった発想が生まれることが多いのかなということです．何か壁にぶつかったときは面白くてすごい発想ができるチャンスなのかもしれませんね．逆境にも意識的に取り組みすごい発想ができればと思います．　(T)

数　理　科　学　6月号

2012 年 6 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ⓒ 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁